Dirichletov princip

Loredana Simčić
(loredana.simcic@riteh.hr)

Županijsko stručno vijeće učitelja matematike Istarske županije

23. travnja 2015.

Popis tema za matematička natjecanja

Izvor: www.azoo.hr/images/Natjecanja_2015/Natjecanje_iz_matematike.doc

	ŠKOLSKO NATJECANJE	ŽUPANIJSKO NATJECANJE	DRŽAVNO NATJECANJE
5. r.	gradivo prethodnih razreda prirodni brojevi djeljivost	navedeno gradivo 5. razreda skupovi točaka u ravnini logički zadaci kombinatorni zadaci	navedeno gradivo 5. razreda razlomci logički zadaci kombinatorni zadaci Dirichletov princip
6. r.	gradivo prethodnih razreda razlomci trokut	navedeno gradivo 6. razreda cijeli brojevi logički zadaci kombinatorni zadaci	navedeno gradivo 6. razreda racionalni brojevi logički zadaci kombinatorni zadaci Dirichletov princip
7. r.	gradivo prethodnih razreda koordinatni sustav proporcionalnost i obrnuta proporcionalnost vjerojatnost	navedeno gradivo 7. razreda sličnost i mnogokuti logički zadaci kombinatorni zadaci diofantske jednadžbe Dirichletov princip	navedeno gradivo 7. razreda kružnica i krug logički zadaci kombinatorni zadaci diofantske jednadžbe Dirichletov princip
8. r.	gradivo prethodnih razreda kvadriranje i korjenovanje Pitagorin poučak realni brojevi	navedeno gradivo 8. razreda preslikavanja ravnine logički zadaci kombinatorni zadaci diofantske jednadžbe Dirichletov princip	navedeno gradivo 8. razreda geometrija prostora logički zadaci kombinatorni zadaci diofantske jednadžbe Dirichletov princip

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805. - 1859.)
njemački matematičar

- radio na dokazu Velikog Fermatovog teorema
- jedan od začetnika algebarske teorije brojeva
- predložio modernu definiciju funkcije

Prvi je formulirao Dirichletov princip 1834. godine pod imenom *Schubfachprinzip* (princip ladica, princip polica).

Dirichletov princip

Dirichletov princip - slaba forma

Ako $n+1$ predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem dva predmeta.

Dirichletov princip

Dirichletov princip - slaba forma

Ako $n+1$ predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem dva predmeta.

Primjer 1.

Dokažite da među 13 učenika uvijek postoje dva učenika koji su rođeni u istom mjesecu.

Dirichletov princip

Dirichletov princip - slaba forma

Ako $n + 1$ predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem dva predmeta.

Primjer 1.

Dokažite da među 13 učenika uvijek postoje dva učenika koji su rođeni u istom mjesecu.

Primjer 2.

Tablica dimenzija 5×5 popuni se brojevima iz skupa $\{-1, 0, 1\}$. Izračunaju se sume u pojedinim retcima, stupcima, te na dvije glavne dijagonale. Dokažite da, kako god tablica bila popunjena, među tim sumama postoje dvije jednake.

Poopćenje Dirichletovog principa:

- Ako $2n + 1$ predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem tri predmeta.
- Ako $3n + 1$ predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem 4 predmeta.
- Ako $kn + 1$ predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem $k + 1$ predmeta.

Poopćenje Dirichletovog principa:

- Ako $2n+1$ predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem tri predmeta.
- Ako $3n+1$ predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem 4 predmeta.
- Ako $kn+1$ predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem $k+1$ predmeta.

Dirichletov princip - jaka forma

Ako je m predmeta razmješteno u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1$ predmeta.

Poopćenje Dirichletovog principa:

- Ako $2n+1$ predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem tri predmeta.
- Ako $3n+1$ predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem 4 predmeta.
- Ako $kn+1$ predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem $k+1$ predmeta.

Dirichletov princip - jaka forma

Ako je m predmeta razmješteno u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1$ predmeta.

Primjer 3.

U razredu ima 40 učenika. Dokažite da postoji mjesec u godini u kojem rođendan slave najmanje 4 učenika tog razreda.

Dirichletov princip u teoriji brojeva

Primjer 4. (Državno, 6. razred, 2014.)

Dokažite da među bilo kojih 6 prirodnih brojeva postoje dva broja čija je razlika djeljiva s 5.

Dirichletov princip u teoriji brojeva

Primjer 4. (Državno, 6. razred, 2014.)
Dokažite da među bilo kojih 6 prirodnih brojeva postoje dva broja čija je razlika djeljiva s 5.

Primjer 5. (Državno, 7. razred, 2013.)
Dokažite da među bilo koja 502 prirodna broja postoje dva čiji su ili zbroj ili razlika djeljivi s 1000.

Dirichletov princip u geometriji

Primjer 6.

U jediničnom kvadratu dano je 5 točaka. Dokažite da među njima postoje barem dvije čija je udaljenost manja od $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dirichletov princip u geometriji

Primjer 6.

U jediničnom kvadratu dano je 5 točaka. Dokažite da među njima postoje barem dvije čija je udaljenost manja od $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Primjer 7. (Državno, 8. razred, 2013.)

Unutar kvadrata čija je stranica duljine 1 dm nalazi se 110 točaka. Dokažite da postoji krug polumjera $\frac{1}{8}$ dm unutar kojeg se nalaze barem 4 zadane točke.

Dirichletov princip u geometriji

Primjer 6.
U jediničnom kvadratu dano je 5 točaka. Dokažite da među njima postoje barem dvije čija je udaljenost manja od $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Primjer 7. (Državno, 8. razred, 2013.)
Unutar kvadrata čija je stranica duljine 1 dm nalazi se 110 točaka. Dokažite da postoji krug polumjera $\frac{1}{8}$ dm unutar kojeg se nalaze barem 4 zadane točke.

Primjer 8.
U laboratoriju oblika kocke brida duljine 3 m, iz razbijenog je terarija pobjeglo 136 leptira. Dokažite da se u svakom trenutku sferom polumjera 9 dm može obuhvatiti barem 6 leptira.

Dirichletov princip i poznanstva

Primjer 9.

Na otvorenju izložbe poznatog slikara okupilo se društvo od 60 ljubitelja umjetnosti. Dokažite da među nazočnima postoje barem dvije osobe koje imaju jednak broj poznanika.

Dirichletov princip i poznanstva

Primjer 9.

Na otvorenju izložbe poznatog slikara okupilo se društvo od 60 ljubitelja umjetnosti. Dokažite da među nazočnima postoje barem dvije osobe koje imaju jednak broj poznanika.

Primjer 10.

Dokažite da u svakoj skupini od 6 ljudi postoje ili tri međusobna poznanika, ili postoji trojka ljudi od kojih se nikoja dva ne poznaju.

Srednja škola...

Primjer 11. (Županijsko, 2. razred, 2011.) Dokaži da u skupu od devet prirodnih brojeva, od kojih ni jedan nema prostog djeljitelja većeg od 6, postoje dva broja čiji je umnožak potpun kvadrat (kvadrat nekog prirodnog broja).

Primjer 12. (Državno, 3. razred, 2013.) Dokaži da je među bilo koja četiri broja iz intervala $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ moguće odabrati dva broja, nazovimo ih x i y, tako da vrijedi

$$8 \cos x \cos y \cos(x - y) + 1 > 4(\cos^2 x + \cos^2 y).$$

Primjer 13. (Državno, 4. razred, 2012.) Za dva polja tablice 10×10 kažemo da su *prijateljska* ako imaju barem jedan zajednički vrh. U svako polje tablice upisan je po jedan prirodni broj manji ili jednak 10, tako da su brojevi u prijateljskim poljima relativno prosti. Dokaži da postoji broj koji se pojavljuje u toj tablici barem 17 puta.

Literatura

- M. Krnić, *Dirichletovo pravilo*, HMD, Zagreb, 2001.
- Z. Kurnik, *Dirichletov princip*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike-mentore, 1993.

Hvala na pažnji!