Geometrijska vjerojatnost
didaktički pristupi

dr. sc. Ivan Dražić

Tehnički fakultet u Rijeci

ŽSV učitelja matematike
Pazin, 24.11.2016.

Sadržaj predavanja

- Vjerojatnost i svakodnevica. Razumijevanje vjerojatnosti.
- Teorija vjerojatnosti u nastavi matematike - problematika.
- Definicije vjerojatnosti: statistička, klasična, aksiomatska i geometrijska.
- Primjeri zadataka s geometrijskom vjerojatnošću.
- Izrada zadataka s geometrijskom vjerojatnošću.
- Didaktičke smjernice za nastavu vjerojatnosti.

Vjerojatnost oko nas

- Police osiguranja
- Financijske odluke
- Prevalencija bolesti
- Igre na sreću
- Poslovne odluke
- ...

Vjerojatnost u nastavi matematike

Problem postavljen petnaestogodišnjacima (PISA istraživanje, Njemačka, 2003.) glasio je ovako:

„Kutija A sadrži jednu bijelu i dvije crne kuglice, a kutija B dvije bijele i pet crnih kuglica. Ako su vam oči pokrivene, iz koje ćete kuglice izvlačiti bijelu kuglicu?“

Svega 27% učenika odgovorilo je točno – bolji bi se rezultat dobio pogađanjem.

Koliko doista razumijemo vjerojatnost?

Primjer

Osigurali smo kuću od rizika poplave i poplava se dogodila. Hoćemo li mijenjati policu osiguranja?

Primjer

Kolika mora biti vjerojatnost događaja da bi ga smatrali gotovo sigurnim? Drugim riječima, što znači visoka vjerojatnost?

Primjer

Vjerojatnost dobitka je 1 promil. Čemu onda igrati?

Vjerojatnost u nastavi matematike

Uočene poteškoće:

- slaba zastupljenost u kurikulumima
- prejaka veza s kombinatorikom
- nedostatak primjene
- povezivanje sa hazardom
- nastavnici zaziru od ovog područja
- manjak adekvatne literature i didaktičkih smjernica

Nastanak teorije vjerojatnosti

1654. Antoine Gombaud, Chevalier de Méré

- Zbog svojeg interesa za kocku provodi eksperiment ponavljanja igre.
- Početak korepodencije između Blaisea Pascala i Pierrea de Fermata.
- Christian Huygens, nizozemski matematičar: *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, 1657. - prva knjiga iz ovog područja

Statistička definicija vjerojatnosti

Definicija

Relativna frekvencija pojavljivanja događaja A jednaka je

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n},$$

gdje je A događaj čiju vjerojatnost tražimo (vezan uz slučajan pokus), a n_A broj pojavljivanja promatranog događaja u n ponavljanja pokusa.

Definicija (Statistička definicija vjerojatnosti)

Vjerojatnost događaja A jednaka je

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_n(A).$$

Primjer

Primjer

Prilikom testiranja novog uređaja utvrđeno je da je u kontigentu od 1000 uređaja njih 852 trajalo dulje od godine dana. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabran uređaj traje dulje od godine dana?

A - uređaj traje dulje od godine dana
$n = 1000$
$n_A = 852$

$$P(A) \approx \frac{n_A}{n} = 0.852 = 85.2\%$$

Koje su manjkavosti ove definicije?

Eksperiment (pokus) i model

Eksperiment	**Observacija**
Bacanje novčića	Je li palo pismo ili glava?
Prijenos signala	Koji je signal pristigao?
Prijenos signala	Koji je signal identificiran?

U praksi se analiziraju modeli stvarnih eksperimenata (npr. homogen novčić, transmisija signala s ograničenim smetnjama, ...)

Ishodi i prostor ishoda

Definicija

Ishod eksperimenta (eng. *outcome*) je bilo koja moguća observacija eksperimenta.
Skup svih mogućih ishoda eksperimenta zovemo **prostorom ishoda** (eng. *sample space*) i označavamo ga sa Ω.

Ako se dogodi jedan ishod, drugi ishodi se ne mogu dogoditi!

Primjer

Prilikom kontrole kvalitete uređaj može dobiti ocjene "zadovoljava (0)" i "ne zadovoljava (1)".
Ishodi - dobivene ocjene
$\Omega = \{0, 1\}$ - prostor ishoda

Događaji

Definicija

Događaj (eng. *event*) je skup ishoda nekog eksperimenta (podskup prostora ishoda). Oznake: $A, B, ..., A_1, A_2, ...$

Ishod nazivamo i **elementarnim događajem**.

Primjer

Bacanje igraće kocke:
Prostor događaja: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Događaji:
$A_1 = \{1, 3, 5\}$ - pao je neparan broj,
$A_2 = \{2, 4, 6\}$ - pao je paran broj,
$A_3 = \{5, 6\}$ - pao je broj veći od 4
...
Koliko događaja dozvoljava ovaj prostor događaja?

Događaji

Definicija

Događaj je siguran ako se dogodi kod svake realizacije eksperimenta (kod bacanja kocke siguran događaj je npr. pao je broj između 1 i 6).

Definicija

Događaj je nemoguć ako se nikad ne realizira (kod bacanja kocke je nemoguć npr. događaj - pao je broj 7).

Definicija

Dva su događaja disjunktna ako se ne mogu dogoditi istovremeno (kod bacanja kocke:
A – pao je broj manji od 3 i B – pala je 6-ica.

Primjer

Primjer

Tester radioaktivnih čestica ima dvije lampice: zelenu (koja se pali ako su radioaktivne čestice prisutne u dozvoljivoj količini) i crvenu (koja se pali ako je prisutna nedozvoljena količina radiokativnih čestica).
Testiranje radioaktivnosti u prostoriji provodi se u nizu od tri testiranja.

1. Opišite prostor ishoda.
   $\Omega = \{CCC, CCZ, CZC, CZZ, ZCC, ZCZ, ZZC, ZZZ\}$.
2. Zapišite događaj "radioaktivnost je zabilježena u najviše jednom testiranju"
   $A = \{CZZ, ZCZ, ZZC, ZZZ\}$.

Kako izračunati vjerojatnost događaja A?

Klasična definicija vjerojatnosti

Definicija

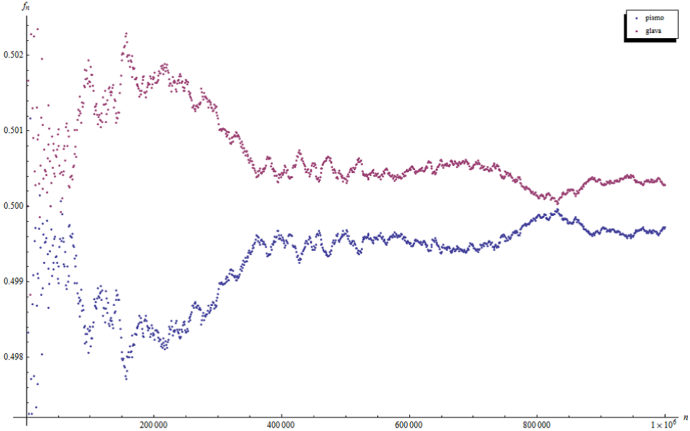
Promatrajmo eksperiment s n **mogućih, jednako vjerojatnih, disjunktnih** ishoda. Neka je za odabrani događaj A, m **ishoda povoljnih**. Tada je vjerojatnost događaja A jednaka

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Kolika je vjerojatnost događaja iz prethodnog primjera?

Ima li ova definicija neke praktične manjkavosti?

Veza statističke i klasične definicije



Slika: Simulacija bacanja novčića - relativne frekvencije.

Aksiomatska definicija vjerojatnosti

Kolmogorovljevi aksiomi

Neka je $\mathfrak{F}$ skup (algebra) događaja. Funkciju $P : \mathfrak{F} \to [0, 1]$ nazivamo **vjerojatnost** ako zadovoljava sljedeće uvjete (aksiome):

1. $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathfrak{F}$,
2. $P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$,
3. $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$,

Važne posljedice:

1. $P(A^C) = 1 - P(A)$,
2. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Geometrijska definicija vjerojatnosti

Definicija

Neka je prostor ishoda Ω reprezentiran **ograničenim izmjerivim** podskupom euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ i neka je je $m(\Omega)$ njegova geometrijska mjera (duljina, površina, volumen).
Ako je događaj čiju vjerojatnost želimo odrediti reprezentiran izmjerivim podskupom $A \subset \Omega$, danu vjerojatnost izračunavamo formulom

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

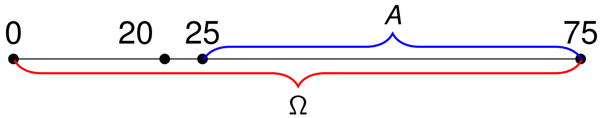
Ovako definirana vjerojatnost naziva se **geometrijska vjerojatnost**.

Primjeri

Primjer

Crveno svjetlo na semaforu traje 20 sekundi, žuto 5 sekundi, a zeleno 50 sekundi. Kolika je vjerojatnost da će vozilo na semaforu uhvatiti zeleno svijetlo?

Zadatak se grafički može ovako reprezentirati:

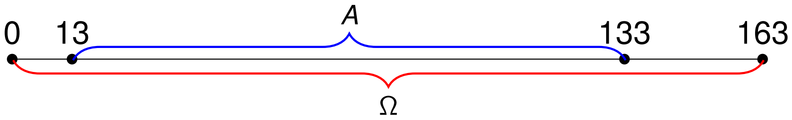


Tražena vjerojatnost je $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)} = \dfrac{50}{75} = \dfrac{2}{3}$.

Primjeri

Primjer

Autocestom se kreće kolona teretnih vozila. Svako vozilo dugačko je 13 m, a razmak između vozila iznosi 150 m. S nadvožnjaka visi komad leda koji samo što nije pao na cestu. Ako led padne na vozilo ili na manje od 30 m ispred vozila doći će do udesa. Kolika je vjerojatnost da neće doći do udesa zbog pada leda?



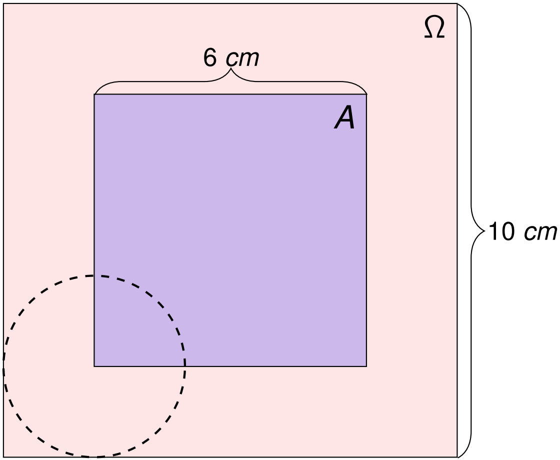
$$p(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{133 - 13}{163} = 0.736.$$

Primjeri

Primjer

Loptica za golf zbog siline udarca izašla je sa golf terena i pala na kanalizacijsku rešetku. Loptica je promjera 4 cm, a šupljine na rešetki su u obliku kvadrata duljine stranice 10 cm. Pretpostavlja se da će se loptica odbiti od rešetke čim je dotakne. Uz pretpostavku da je debljina rešetke zanemariva odredite vjerojatnost da će loptica upasti u kanalizaciju.

Primjeri



Tražena vjerojatnost je $P(A) = \frac{6^2}{10^2} = 0.36.$

Primjeri

Primjer

Dvoje supružnika dijeli bankovni račun na kojem se trenutno nalazi 8000 kn s dozvoljenim minusom od 2000 kn. Svaki od njih kao iznenađenje kupuje onom drugom poklon za godišnjicu braka, pri čemu je jednako vjerojatno da potroše bilo koji iznos do 10000 kuna.

a) Kolika je vjerojatnost da će si međusobno kupiti poklone, a da ne iskoriste opciju dozvoljenog minusa?
b) Kolika je vjerojatnost da će si međusobno kupiti poklone bez korištenja dozvoljenog minusa te da će suprug potrošiti barem tri puta veći iznos od supruge?

Primjeri

Neka x i y označavaju iznose koje će potrošiti svaki od supružnika. Prostor ishoda bit će kvadrat $[0, 10000] \times [0, 10000]$.

a) Događaj čiju vjerojatnost tražimo definiran je s $0 \leq x + y \leq 8000$. Tražena vjerojatnost je $p = 0.32$.

b) Pretpostavimo da je x iznos koji je potrošila supruga, a y iznos koji je potrošio suprug. Uz uvjet iz a) zadatka ovdje još imamo i uvjet $y \geq 3x$. Tražena vjerojatnost je $p = 0.08$.

Kako smisliti kreativan zadatak?

1. Odabrati jednu ili više uniformno distribuiranih slučajnih varijabli.
2. Odabrati uvjete na dane varijable.
3. Odabrane varijable i uvjete smjestiti u realnu situaciju.

Primjer

1. X - veličina jedne datoteke (između 5 i 7 GB), Y - veličina druge datoteke (između 6 i 8 GB)
2. Kolika je vjerojatnost da je druga veća od prve?
3. U finalu natjecanja u izradi kratkih dokumentarca sudjeluju dvije ekipe ...

Česte pogreške kod smišljanja zadataka

Primjer

Marko svako jutro pije 4 dcl mlijeka, međutim mlijeko tijekom dana piju i ostali članovi njegove obitelji. Kolika je vjerojatnost da će Marko ujutro u hladnjaku naći dovoljno mlijeka?
NEOMEĐENOST SKUPA ISHODA!

Primjer

Ana i Iva rade na projektima koji mogu trajati najviše 5 dana. Kolika je vjerojatnost da će Ana završiti s projektom prije Ive?
POGREŠNA RAZDIOBA (BETA UMJESTO UNIFORMNE)!

Primjer

Svaki od 5 prijatelja ima 10 kn. Kolika je vjerojatnost da će zajedno potrošiti više od 30 kn? NEMOGUĆA VIZUALIZACIJA!

Didaktičke smjernice

Izvori: Američko statističko društvo, suvremena istraživanja

- Uspoređivanje i kvantificiranje vjerojatnosti
- Izdvajanje prostora događaja
- Razumijevanje pojma slučajnosti
- Korištenje realnih podataka i situacija
- Aktivni oblici učenja - učenik u fokusu
- Korištenje suvremenih tehnologija - simulacije
- Refleksivni pristup nastavi (česte evaluacije, samoanaliza)

Što obično nalazimo u udžbenicima?

Primjer

U posudi se nalazi 95 crvenih i 5 bijelih kuglica. Na sreću biramo 4 kuglice. Kolika je vjerojatnost da je među odabranim kuglicama najviše jedna bijela?

Primjer

Na slučajan se način biraju brojevi $x \in [0, 2]$ i $y \in [0, 1]$. Odredite vjerojatnost da je $2y < x^2 + 1$ i $2y > x$.

Primjer

U pošiljci od 100 memorijskih modula 5 je neispravnih. Serviser zbog terenskog servisa iz pošiljke uzima 4 komada.

a) Odredite vjerojatnost da će serviser će moći napraviti zamjenu 4 neispravna memorijska modula. **Rj. 0.812**
b) Odredite vjerojatnost da su svi memorijski moduli koje je serviser uzeo bili neispravni. **Rj. 0.0000013**

Diskusija:

a) Da ste Vi serviser, biste li uzeli neki modul rezerve? Obrazložite.
b) Ako trebate zamijeniti samo jedan modul, je li dovoljno uzeti tri modula rezerve?

Na kraju

U današnjem užurbanom svijetu dijete već u osnovnoj školi mora donositi različite odluke, birati između alternativa, boriti se sa rizicima, . . . i to u neusporedivo većoj mjeri nego je moralo prije svega dvadesetak godina. Ono što dijete očekuje od društva, bolje rečeno ono što je djetetovo temeljno pravo – pomoć je u tim procesima. Dijete se treba educirati kako temeljem dostupnih informacija može donijeti za sebe najpovoljniju odluku, drugim riječima – nužna mu je kvalitetna edukacija iz područja vjerojatnosti i statistike.

Neki teoretičari znanosti znaju dati usporedbu da će se svijet 2100. godine puno više razlikovati u odnosu na današnji svijet nego što se današnji svijet razlikuje u odnosu na onaj iz kamenog doba. ***Ne pratimo li napredak znanosti i potrebe suvremenog čovjeka iz škola će nam izlaziti djeca prošlosti, a ne djeca budućnosti.***