Geometrijski uzorak: potencijal i izazov

Razvoj matematičkih oblika mišljenja i zaključivanja kroz problemske zadatke s geometrijskim uzorcima

Branka Antunović-Piton

SVEUČILIŠTE JURJA DOBRILE U PULI

FOOZ Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti

bpiton@unipu.hr

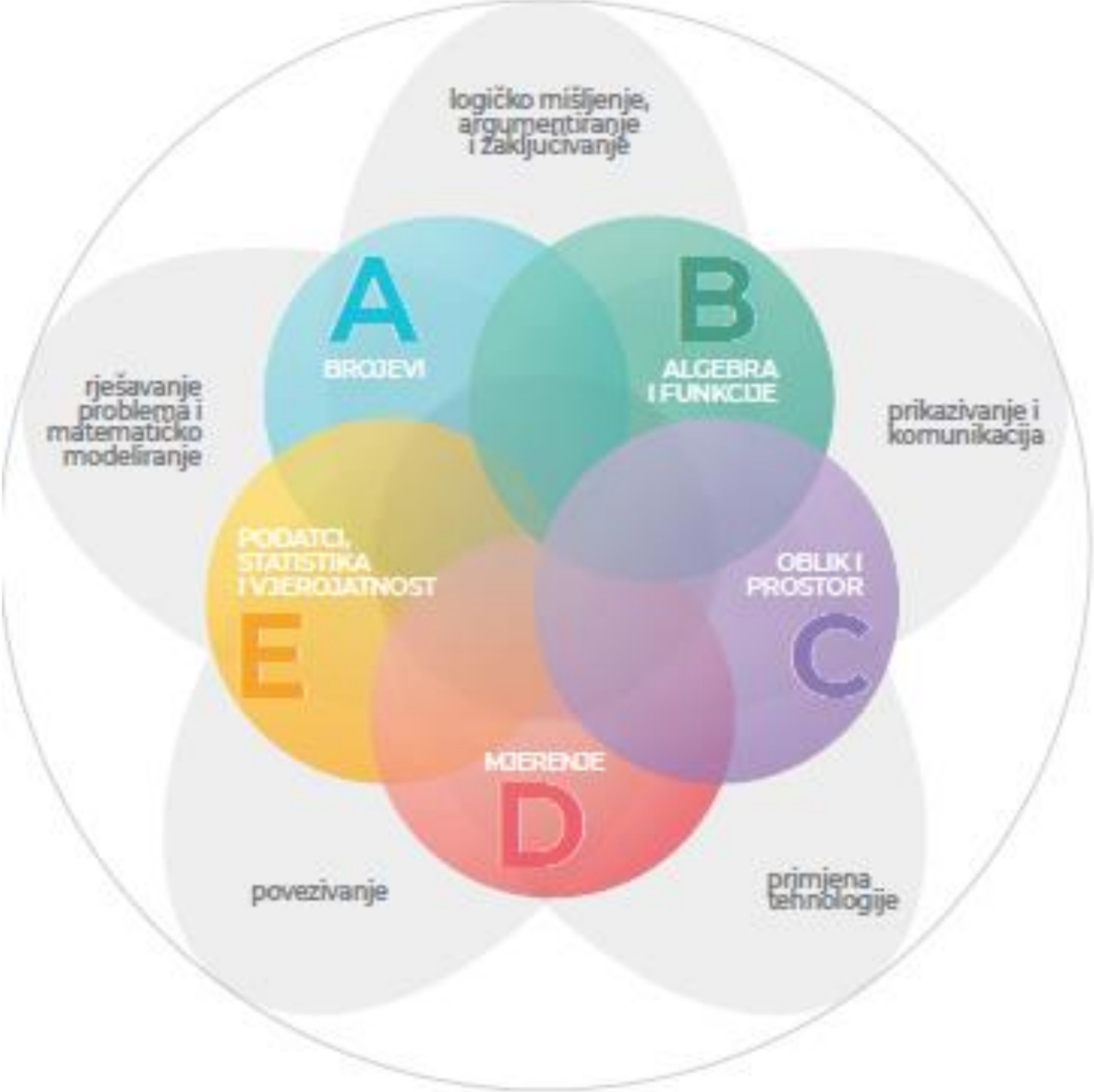
Međužupanijsko stručno vijeće nastavnika matematike
Primorsko-goranske, Ličko-senjske, Karlovačke i Istarske županije

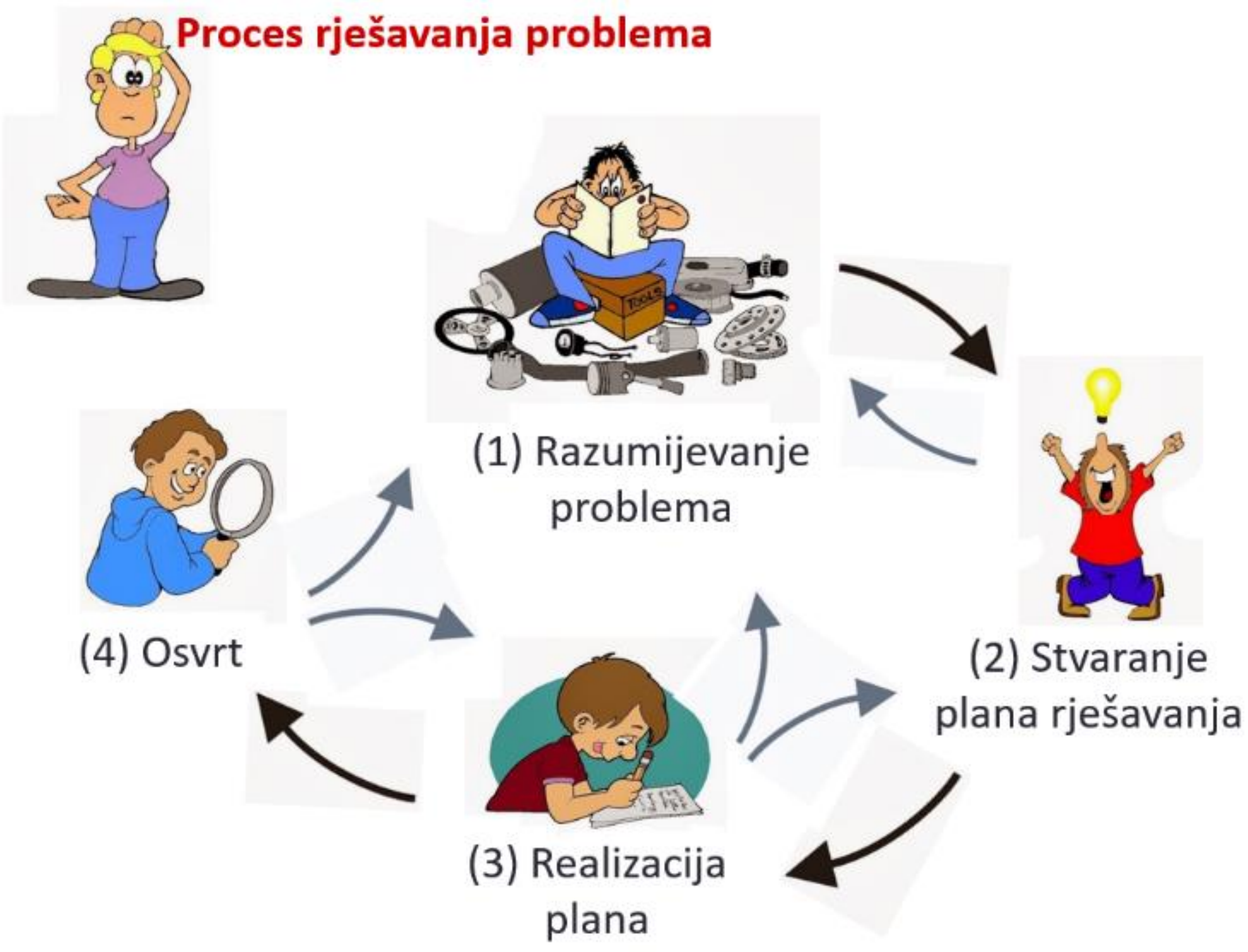
18. veljače 2021.

Plan predavanja

1. Uvod
2. O uzorcima (eng. patterns)
3. Geometrijski uzorak - faze/aktivnosti
4. Problemski zadaci s uzorcima
5. Zaključak

Isprepletenost domena i procesa (KNPM,2019)





Model rješavanja u 4 faze - Polya

- Proces rješavanja **nije linearan.**
- Potrebna je stalna izmjena faza.

Vrednovanje problemskih zadataka:

- kompleksno
- naglasak na analizi procesa rješavanja
- stječe se dublji uvid u misaoni proces učenika

Analiza i diskusija procesa rješavanja**:**

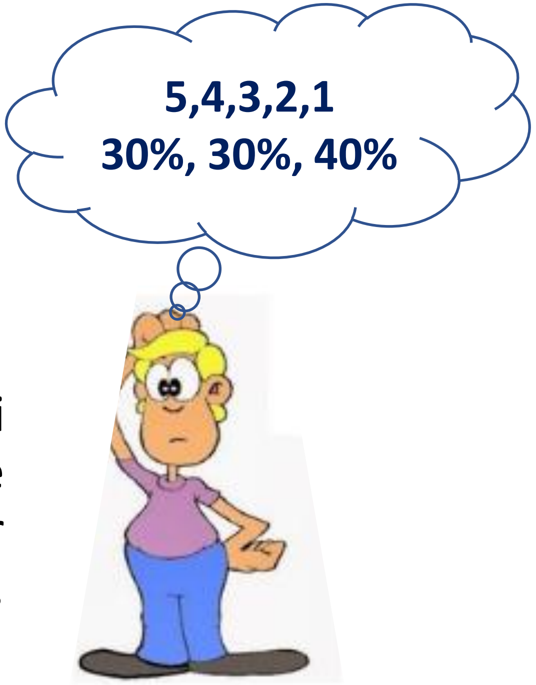
- usvajanje različitih strategija
- povezivanje različitih matematičkih koncepata
- dublje razumijevanje, trajnija znanja
- razvijanje kulture rješavanja zadataka

Vrednovanje usvojenosti odgojno obrazovnih ishoda
(KNPM, 2019)

formativno vrednovanje	sumativno vrednovanje
za učenje	naučenog
kao učenje	

Elementi vrednovanja

1. Usvojenost znanja i vještina
2. Matematička komunikacija
3. Rješavanje problema



Učitelji imaju **autonomiju** i **odgovornost** izabrati najprikladnije metode i tehnike vrednovanja unutar pojedinih pristupa vrednovanju.

Elementi vrednovanja (KNPM, 2019)

1. Usvojenost znanja i vještina

- opisuje matematičke pojmove
- odabire pogodne i matematički ispravne procedure te ih provodi
- provjerava ispravnost matematičkih postupaka i utvrđuje smislenost rezultata
- upotrebljava i povezuje matematičke koncepte.

2. Matematička komunikacija

- koristi se odgovarajućim matematičkim jezikom (standardni matematički simboli, zapisi i terminologija) pri usmenome i pisanom izražavanju
- koristi se odgovarajućim matematičkim prikazima za predstavljanje podataka
- prelazi između različitih matematičkih prikaza
- svoje razmišljanje iznosi cjelovitim, suvislim i sažetim matematičkim rečenicama
- postavlja pitanja i odgovara na pitanja koja nadilaze opseg izvorno postavljenoga pitanja
- organizira informacije u logičku strukturu
- primjereno se koristi tehnologijom.

3. Rješavanje problema

- prepoznaje relevantne elemente problema i naslućuje metode rješavanja
- uspješno primjenjuje odabranu matematičku metodu pri rješavanju problema
- modelira matematičkim zakonitostima problemske situacije uz raspravu
- ispravno rješava probleme u različitim kontekstima
- provjerava ispravnost matematičkih postupaka i utvrđuje smislenost rješenja problema
- generalizira rješenje

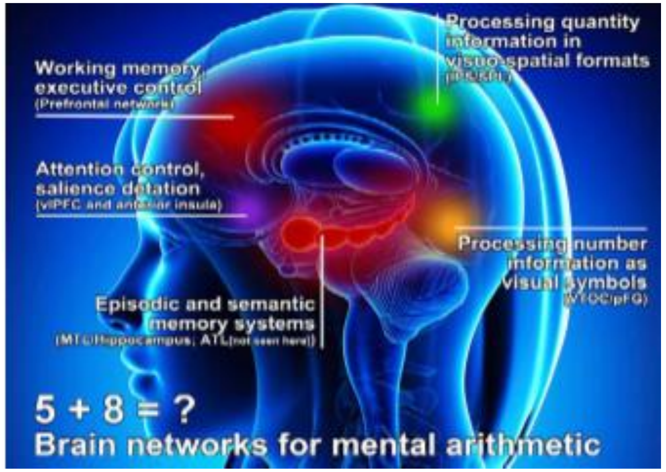
Uloga vizualizacije u rješavanju matematičkih zadataka

***Vizualizacija** je*
- ***sposobnost** stvaranja, interpretiranja, korištenja i promišljanja*
- *o slikama, crtežima, dijagramima,*
- *u našim mislima, na papiru ili pomoću tehnoloških alata,*

s ciljem
- *prikazivanja i komuniciranja informacijama,*
- *razmišljanja o i razvijanja do tada nepoznatih ideja*
- *te unapređivanje razumijevanja*

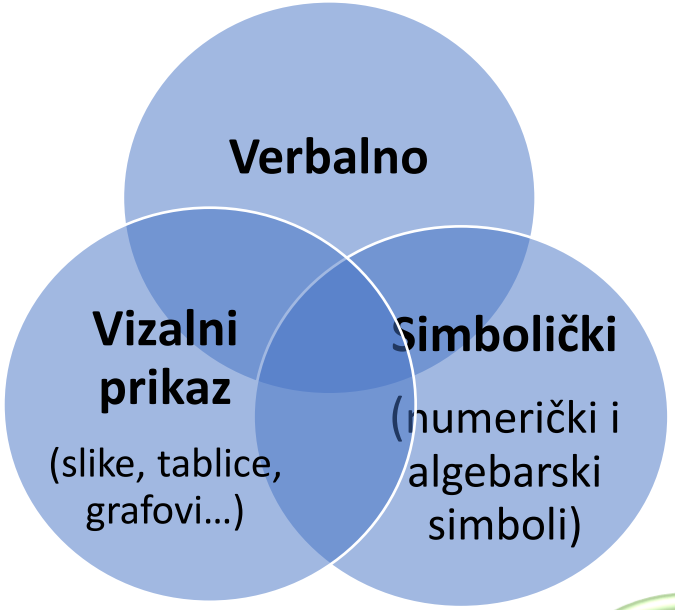
Najčešće korištena definicija, objedinjuje više različitih definicija, Arcavi (2003)

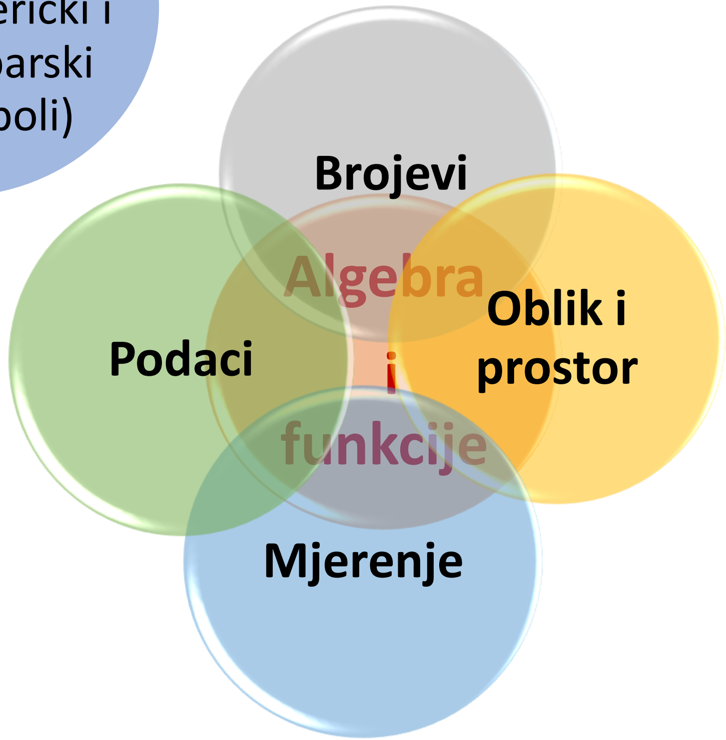
- Potrebno je razviti vještinu **fleksibilnog prijelaza** između govornog jezika, vizualnog prikaza i simboličkog zapisa iste problemske situacije.
- Proces rada s višestrukim reprezentacijama nije linearan niti jednostavan, ali se može **savladati učenjem i poučavanjem**.
- **Vizualni prikazi** složenih konceptualnih struktura predstavljaju **visoke kognitivne zahtjeve** pri uočavanju i uspostavljanju veza među odgovarajućim elementima te strukture.



Boaler, J. (2015). Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Komunikacija matematičkih ideja ostvaruje se…





Algebra i funkcije (KNPM, 2019)

*„ Algebra je jezik za **opisivanje pravilnosti** […]*

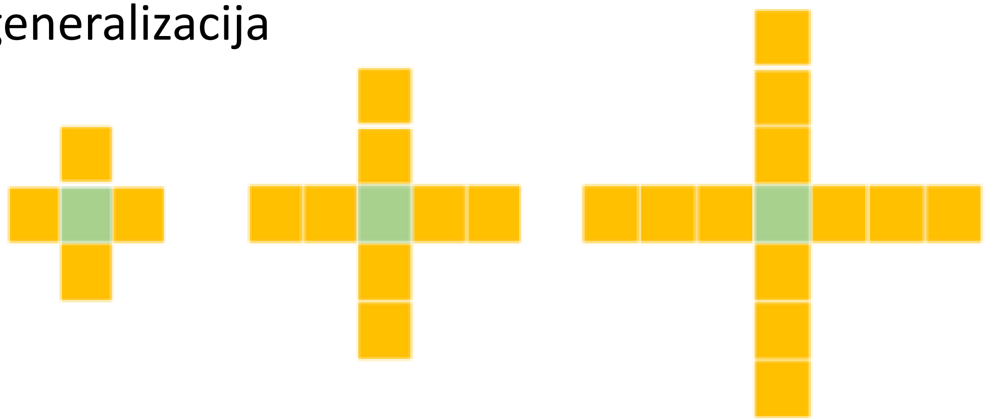
*U domeni Algebra i funkcije učenici se služe **različitim vrstama prikaza**; **grade algebarske izraze, tablice i grafove** radi **generaliziranja, tumačenja i rješavanja problemskih situacija**. […]*

*Određenim algebarskim procedurama koriste se i za primjenu formula i **provjeravanje pretpostavki**.*

*Prepoznavanjem pravilnosti i **opisivanjem ovisnosti dviju veličina** jezikom algebre učenici **definiraju funkcije** koje proučavaju, tumače, uspoređuju, grafički prikazuju i upoznaju njihova svojstva. […]*

…navedeno se može pronaći u *problemskim zadacima* s **geometrijskim uzorkom**

Uzorci su sadržaji koji uključuju predviđanje, rad s varijablama i funkcijama: oblikovanje generalizacija



- Shvaćanje zajedničkog svojstva u svim koracima niza
- Poopćenje tog zajedničkog svojstva na sve korake u nizu
- Opis i zapis pravila koje omogućuje određivanje elemenata bilo koje figure u nizu

MOĆAN ALAT

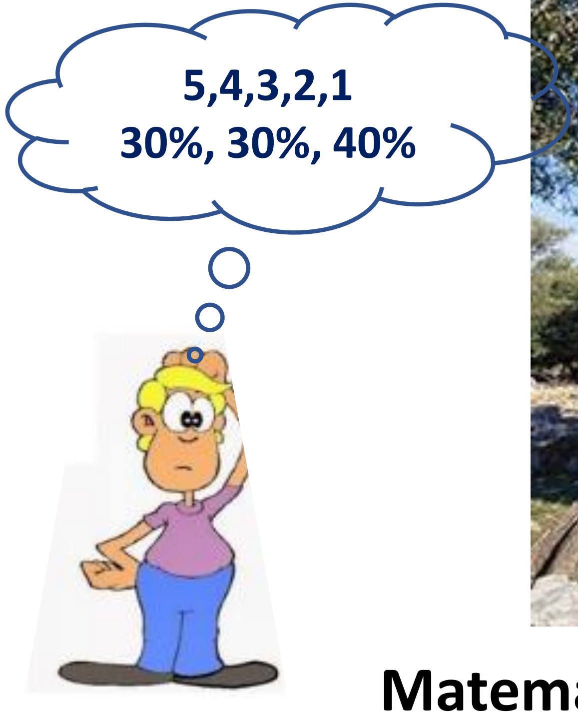
Znanstvena istraživanja u posljednjih 20-ak godina potvrđuju **potencijal uzoraka**:

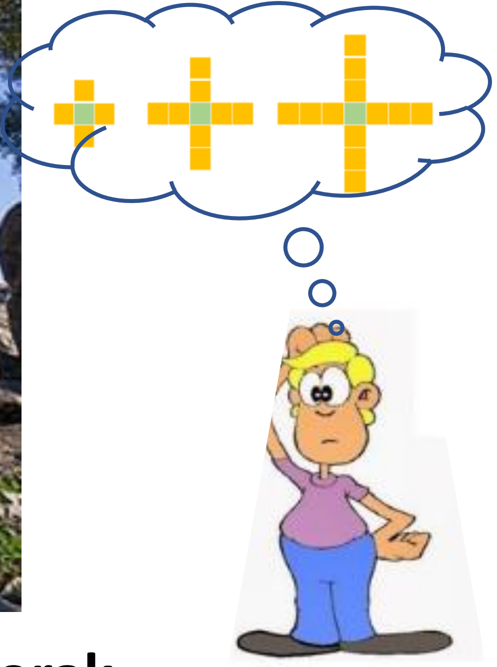
- Razvoja algebarskog mišljenja
- Razvoj funkcijskog mišljenja
- Razvoj figuralnog/vizualnog mišljenja
- razvoj geometrijskog mišljenja
- Strategije rješavanja problema
- Kreativnost, divergentno mišljenje
- Matematički jezik/komunikacija

Izraziti svoje ideje i argumentirati ih, Uvod u dokaz
Dobar osjećaj, Svaki učenik, Osjećaj kompetentnosti
Nove pedagoške prakse i načini poučavanja

Ukratko

Isprepletenost





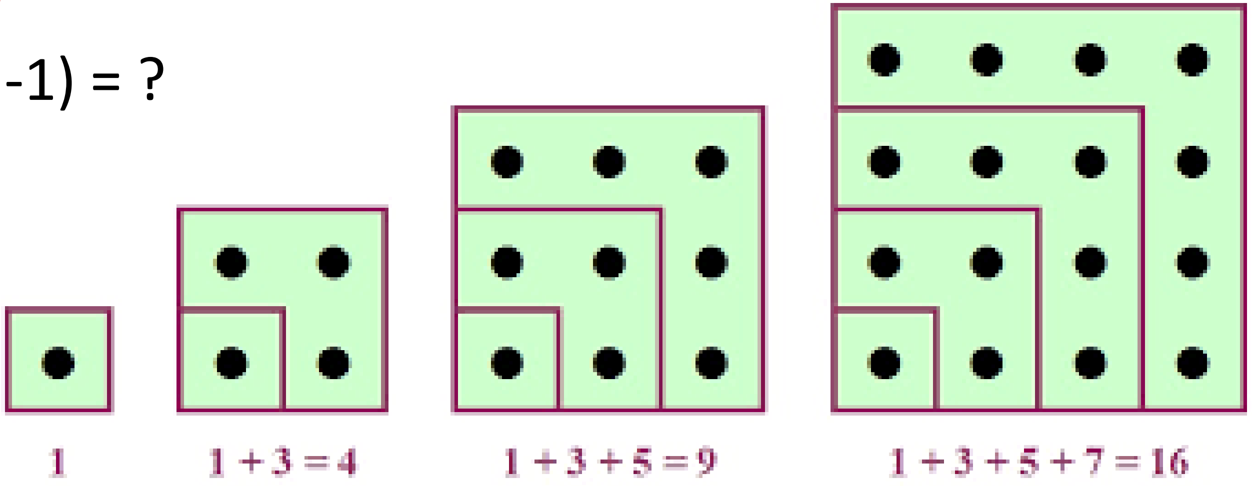
Matematičke domene i procesi kroz geometrijski uzorak
Razvoj matematičkih oblika mišljenja i zaključivanja kroz geometrijski uzorak
Elementi vrednovanja kroz geometrijski uzorak

Masline na Pagu svojim rastom daju isprepletenost oblika kamena i drva te tako stvaraju zanimljivu formu i nadrealističku konturu stabala. Ovakve lokacije, kao što je Lun, postoje još na samo dva mjesta u svijetu i to u Izraelu i Grčkoj.

Često viđen primjer – figurativni brojevi
Veza geometrije (geometrijskog uzorka) i algebre

Kvadratni brojevi:

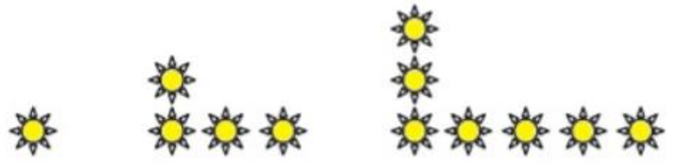
$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = ?$



$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Ali krenimo redom…

Zadatak 1. Cvjetovi



Na slici je prikazano niz figura sastavljenih od sukladnih cvjetova.

a) Opišite kako bi odredili ukupan broj cvjetova u 100. figuri.
b) Odredite opće pravilo za ukupan broj cvjetova u bilo kojoj figuri u nizu.
c) Opišite funkciju f prikazanu tim nizom.
d) Objasnite što znači $f(30)$ i koliko on iznosi?
e) Vrijedi li $f(30) = 5f(6)$?
f) Može li u nekoj figuri biti 1000 cvjetova? Objasnite.

Zadatak 2. Šesterokuti

Na slici je prikazano niz figura sastavljenih od sukladnih šesterokuta.

a) Opišite kako bi odredili opseg 100. figure.
b) Odredite opće pravilo za opseg bilo koje figuri u nizu.
c) Opišite funkciju f prikazanu tim nizom.

Velike ideje

„pogled odozgo"

✓Uzorci
✓Transformacije
✓Kretanje
✓Ravnoteža i simetrija
✓Relacije

Uzorak (obrazac), eng. pattern

- Primjeri iz našeg svakodnevnog života
  (dnevni ritam: ustajanje, kava, rad, ručak, rekreacija, rad, spavanje; vježbe)
- Primjeri iz našeg okruženja (hrvatski jezik, knjižnica, glazba, arhitektura)
- Primjeri iz prirode (dan, noć; sjena, mjesečeve mijene, životinje)
- Prvi matematički zapisi kalendara – uočavanje ponavljanja (uzoraka) u prirodi

✓ Uzorci nas okružuju, pomažu nam u predviđanju, pomažu nam da povezujemo u organizaciji informacija

✓ Uočavanje ponavljanja, uočavanje pravilnosti, predviđanje

Neke vrste uzoraka

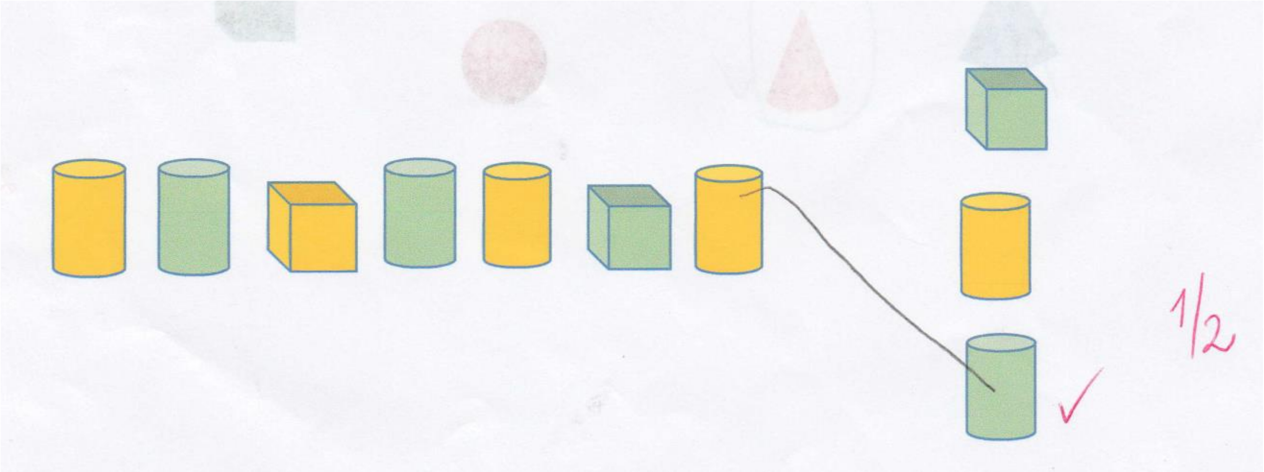
- **Ponavljajući uzorci (niz)**– ima različite elemente koji se ritmički, periodički ponavljaju
  - AABB <=> 1122
  - ko-ko-dak-ko-ko-dak <=> a-a-b-a-ab
- **Strukturirani**-uočavanje zajedničkog, prema čemu klasificiramo ili nižemo
  - Izdvojite predmete koji nisu drveni,
  - koji graf ne predstavlja funkciju,
  - mnogokuti ,četverokuti
- **Rastući uzorak** – pravilnim ponavljanjem gradi se veća struktura; struktura se povećava tako da se uzorak stvara na predvidiv način, uz ponavljanje elemenata

Neke osobine uzoraka

- Jedan uzorak se može nalaziti u mnogo različitih oblika – nezavisnost strukture objekta/korištenog materijala
- Vrlo različite situacije mogu imati jednaka matematička svojstva
- **Generalizacija**
- **Funkcija (niz)**

Iz naše nastavne prakse

- Uzorak -> niz
- Mogu biti rastući, padajući
- Linearni, nelinearni
- U nastavi prisutni od 1. razreda OŠ



$f(1) = 3 = 1 \cdot 3 = 3$

$f(2) = 3 + 3 = 2 \cdot 3 = 6$

$f(3) = 6 + 3 = 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 3 = 9$

$f: N \to S$

$f(1) = 3$

$f(2) = 6$

…

$f(n)=3n$

- ✓ -2,1,4,7,10… $a_n=3n-5$
- ✓ 57,53,49,45,41… $a_n= 61-4n$
- ✓ 2,6,18,54,162… $a_n= 2\cdot 3^{n-1}$
- ✓ 80,40,20,10,5… $a_n=80/2^{n-1}$

Uzorci i nizovi u KNPM

…iščitavamo li ih i drugdje ?

ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHOD	RAZRADA ODGOJNO-OBRAZOVNOG ISHODA
MAT OŠ B.1.2. Prepoznaje uzorak i nastavlja niz.	• Uočava uzorak nizanja. • Objašnjava pravilnost nizanja. Objašnjava kriterije nizanja. • Niže po zadanome kriteriju. Korelacija s Hrvatskim jezikom, Likovnom kulturom, Glazbenom kulturom, Prirodom i društvom, Tjelesnom i zdravstvenom kulturom. **ISHODI NA RAZINI OSTVARENOSTI *DOBAR*** • Nastavlja nizati jednostavne nizove.

SADRŽAJ
Nizovi. Brojevni nizovi.

PREPORUKE ZA OSTVARIVANJE ODGOJNO-OBRAZOVNIH ISHODA
Učenici mogu uočavati pravilnosti nizanja u svakodnevnome okružju (izmjena dana i noći, dani u tjednu, prozori na školskoj zgradi, refren pjesme i slično). Zadatci u kojima se od učenika zahtijeva da nastave niz potiču logičko mišljenje, ali u njihovu osmišljavanju valja paziti da je dano dovoljno objekata u nizu kako bi se tražena pravilnost zaista mogla jedinstveno utvrditi. Dobro je zahtijevati od učenika da svojim riječima objasne po kojemu se pravilu objekti u nizu nižu. Budući da je ovaj ishod usko povezan s brojenjem, možemo od učenika tražiti i da broje po 2 počevši od broja 5. Tu

ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHOD	RAZRADA ODGOJNO-OBRAZOVNOG ISHODA
MAT OŠ B.2.1. Prepoznaje uzorak i kreira niz objašnjavajući pravilnost nizanja.	• Uočava pravilnosti nizanja brojeva, objekata, aktivnosti i pojava. Određuje višekratnike kao brojevni niz. • Kreira nizove. • Objašnjava kriterije nizanja. Korelacija s Likovnom kulturom i Prirodom i društvom. **ISHODI NA RAZINI OSTVARENOSTI *DOBAR*** • Jednostavnim riječima opisuje kriterije nizanja i nastavlja niz.

SADRŽAJ
Nizovi. Brojevni nizovi.

PREPORUKE ZA OSTVARIVANJE ODGOJNO-OBRAZOVNIH ISHODA
Učenici mogu uočiti brojne pojave iz okružja u kojima uočavaju pravilnosti nizanja (dan – noć, godišnja doba, mjeseci u godini, prozori na školskoj zgradi i slično). Posebno su zanimljivi nizovi brojeva (niz prirodnih brojeva, višekratnici). Potrebno je poticati učenike da te uočene pravilnosti nizanja opisuju matematičkim jezikom.

ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHOD	RAZRADA ODGOJNO-OBRAZOVNOG ISHODA	RAZINE OSTVARENOSTI
MAT OŠ B.2.1. Prepoznaje uzorak i kreira niz objašnjavajući pravilnost nizanja.	• Uočava pravilnosti nizanja brojeva, objekata, aktivnosti i pojava. • Određuje višekratnike kao brojevni niz. • Kreira nizove. • Objašnjava kriterije nizanja. Korelacija s Likovnom kulturom i Prirodom i društvom.	**ZADOVOLJAVAJUĆA** • Prepoznaje uzorak i nastavlja jednostavne n **DOBRA** • Jednostavnim riječima opisuje kriterije nizar **VRLO DOBRA** • Prema zadanom kriteriju osmišljava niz i opi **IZNIMNA** • Samostalno kreira niz i objašnjava kriterij nizanja.

SADRŽAJ
Nizovi. Brojevni nizovi.

PREPORUKE ZA OSTVARIVANJE ODGOJNO-OBRAZOVNIH ISHODA
Učenici mogu uočiti brojne pojave iz okružja u kojima uočavaju pravilnosti nizanja (dan – noć, godišnja doba, mjeseci u godini, prozori na šk
Posebno su zanimljivi nizovi brojeva (niz prirodnih brojeva, višekratnici). Potrebno je poticati učenike da te uočene pravilnosti nizanja opisuj

ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHOD	RAZRADA ODGOJNO-OBRAZOVNOG ISHODA	RAZINE OSTVARENOSTI
MAT OŠ D.1.1. Analizira i uspoređuje objekte iz okoline prema mjerivu svojstvu.	• Prepoznaje odnose među predmetima: dulji – kraći – jednako dug, veći – manji – jednak. • Određuje najdulji, najkraći, najveći, najmanji objekt.	**ZADOVOLJAVAJUĆA** • Uspoređuje dva konkretna objekta te ih op **DOBRA** • Uspoređuje, razvrstava i niže objekte prem **VRLO DOBRA** • Uspoređuje i opisuje objekte u prostoru pr **IZNIMNA** • Jasno, precizno i točno analizira objekte u o

SADRŽAJ
Odnosi među predmetima (*dulji – kraći – jednako dug, veći – manji – jednak*).

ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHOD	RAZRADA ODGOJNO-OBRAZOVNOG ISHODA	RAZINE O
MAT SŠ B.4.1. Primjenjuje aritmetički i geometrijski niz.	• Opisuje aritmetički i geometrijski niz, zapisuje opći član niza, povezuje s aritmetičkom i geometrijskom sredinom. • Računa zbroj prvih n članova niza. • Rješava probleme iz svakodnevnoga života primjenom aritmetičkoga i geometrijskoga niza, posebno složeni kamatni račun.	**ZADOVOLJA** • Opisuje razl **DOBRA** • Računa razl **VRLO DOBR** • Određuje o **IZNIMNA** • Modelira pr

SADRŽAJ
Aritmetički i geometrijski niz. Opći član i zbroj prvih n članova niza. Geometrijski red. Složeni kamatr

PREPORUKE ZA OSTVARIVANJE ODGOJNO-OBRAZOVNIH ISHODA
Primjer zadatka složenoga kamatnog računa:
Jedna je o
Koliko će i
Koliko bi v

ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHOD	RAZRADA ODGOJNO-OBRAZOVNOG ISHODA
MAT SŠ B.4.2. Računa limes niza.	• Opisuje pojam limesa, uočava rast ili pad članova niza i postojanje granice, tj. konvergentnost ili divergentnost. Prošireni sadržaj: Neprekidno ukamaćivanje.

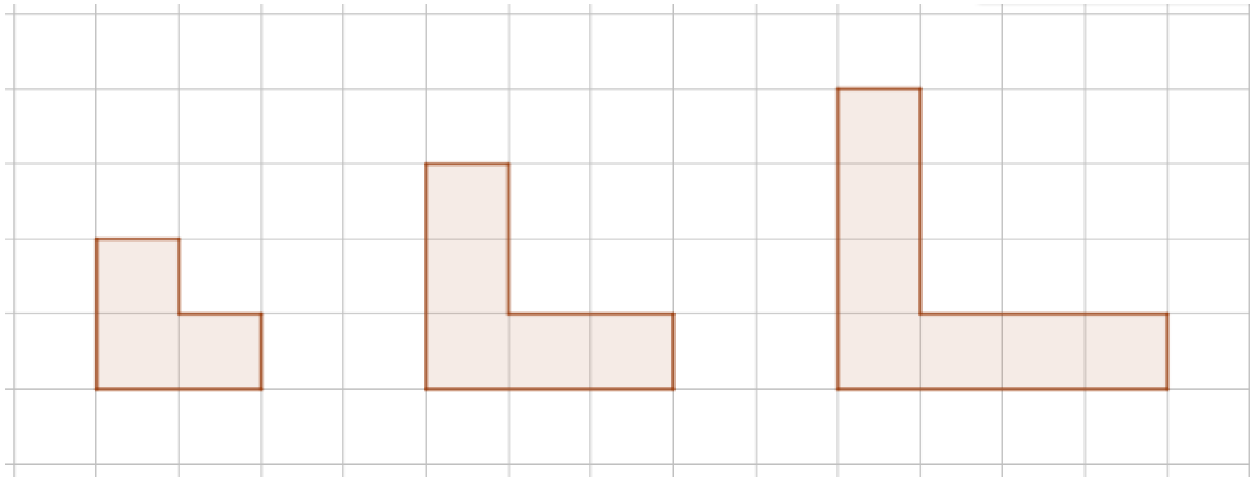
SADRŽAJ
Monotonost i omeđenost niza. Limes niza.
Prošireni sadržaj: Neprekidno ukamaćivanje.

PREPORUKE ZA OSTVARIVANJE ODGOJNO-OBRAZOVNIH ISHO
Ispisivanjem članova niza i smještanjem na brojevni pravac (po mogućnosti korište
članovi unutar intervala, a konačno mnogo ih je izvan.
Jednostavni niz: $\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}, \frac{1}{5n+3}, \frac{1}{n^2}$

ODGOJNO-OBRAZOVNI ISHOD	RAZRADA ODGOJNO-OBRAZOVNOG ISHODA
MAT SŠ B.4.3. Analizira svojstva funkcija.	• Nabraja elementarne funkcije i navodi njihova svojstva (domenu, kodomenu, sliku, rast/ pad, parnost/neparnost, periodičnost, monotonost i ograničenost funkcije). • Povezuje graf funkcije i svojstva objašnjava na grafu.

Rastući geometrijski uzorak

Analiza rastućih geometrijskih uzoraka kroz faze i aktivnosti,
u skladu s dobi, razinama i željenim ishodima



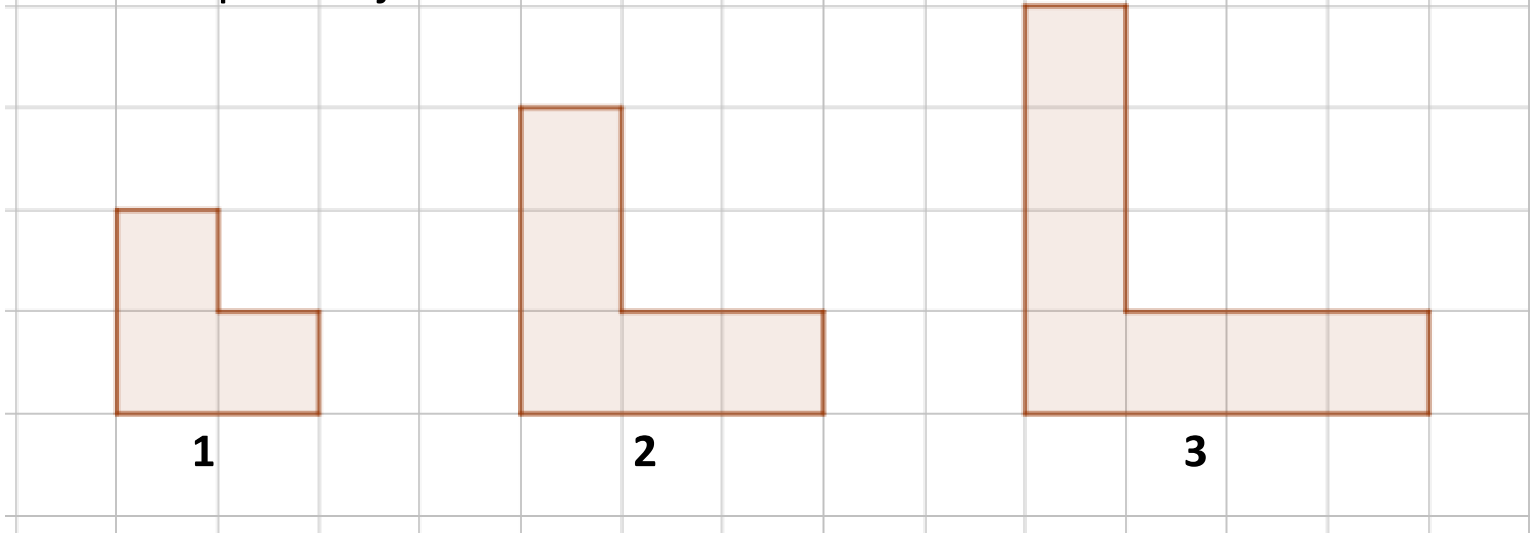
Geometrijski (rastući) uzorak - niz figura u kojima se objekti (osnovni elementi) mijenjaju iz koraka u korak, uobičajeno na predvidljiv način.

- tipično uključuje *dvije varijable*

Faza 1. Promišljanje o figurama koristeći se vizualnim karakteristikama zadanog geometrijskog uzorka

Aktivnost 1. Uočite sličnosti i razlike zadanih figura.

Što se mijenja, a što ostaje isto?
Na koji način se mijenja nekoliko slijedećih u odnosu na prethodni?
Opišite riječima.

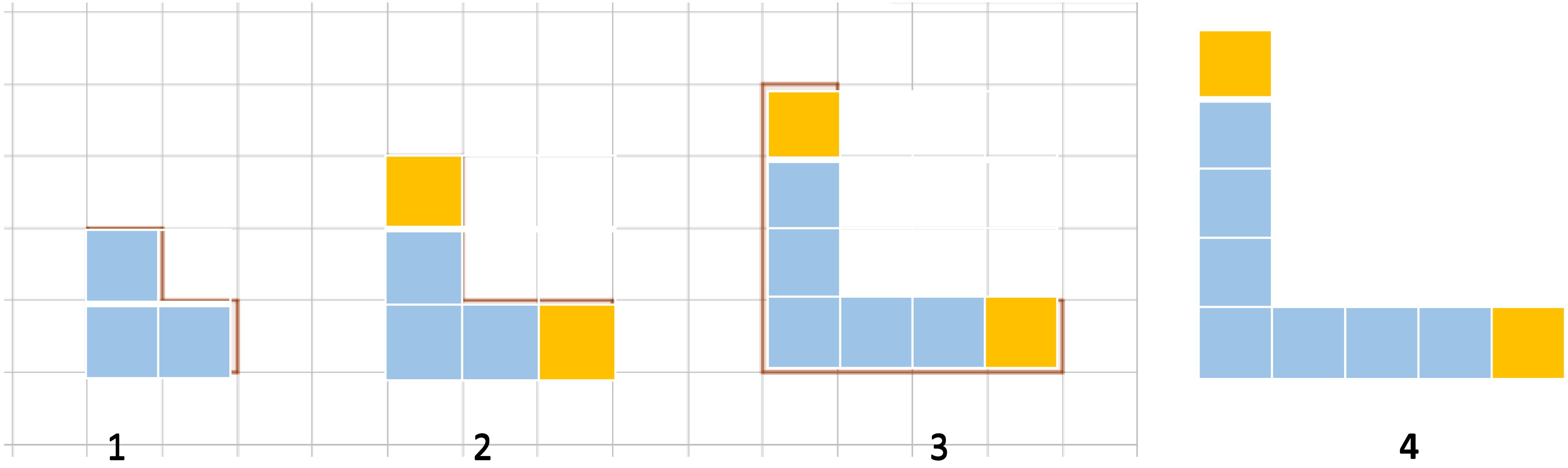


Krenuti od figuralnog promišljanja prema numeričkom promišljanju.

Prva figura ostaje nepromijenjena-slovo L.
Iznad se dodaje jedan, desno se dodaje jedan
U svakom koraku se dodaju 2

Aktivnost 2. Na temelju uočene promjene koja se dešava iz koraka u korak (iz figure u figuru) gradi slijedećih nekoliko figura, članova niza.
Kreiraj tablicu!

Kako bi nacrtali slijedeću figuru u nizu?



n	1	2	3	4	5
f(n)-ukupan broj kvadrata	3	5	7	9	

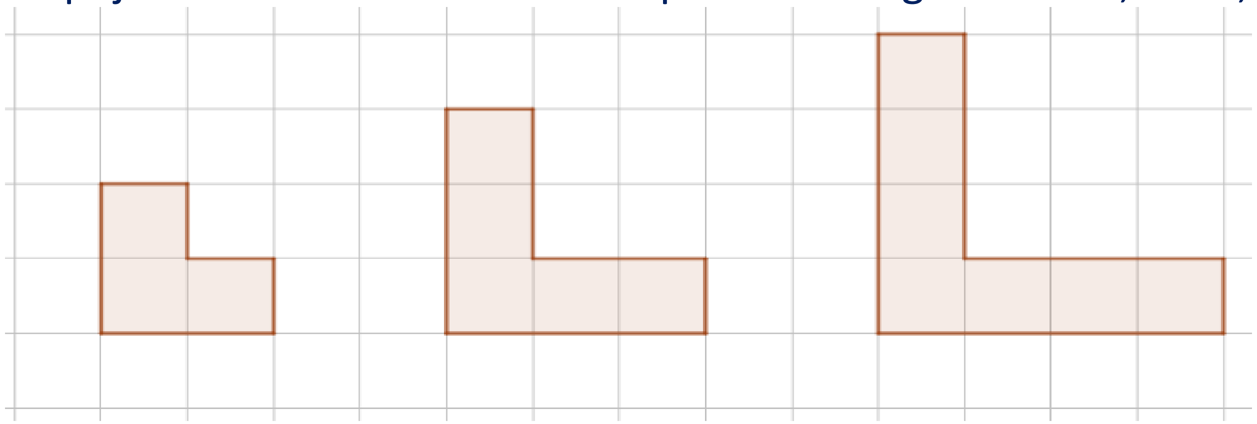
+2 +2 +2 +2

Faza 2. Razvoj numeričkih veza do pravila funkcije

Aktivnost 3.1. Na temelju uočenog pravila vrši predviđanje za izgled figure u proizvoljnom koraku.

Koliko mi pojedinih kvadrata treba da napravim 10. figuru u nizu, a 58., a 100?

10 Mogu nacrtati
58 /100 zamišljaju



Kako bi nekome opisao kako da nacrta bilo koju figuru u nizu?
Koliko kvadrata da napravim n-tu figuru?
Napiši izraz za n-tu figuru

n	1	2	3	4	5	6	...	10	58
F(n)	3	5	7	9	11				
proces	1+2	2+3	3+4					10+11	

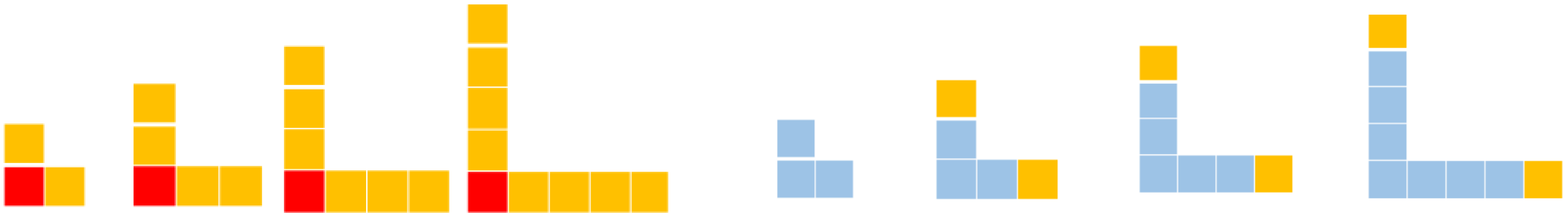
+2 +2

Važan korak povezivanje figuralnog promišljanja sa numeričkim!

Ako se predviđa npr. kako će izgledati 10. ili 58. figura (član niza) onda se to ne može odrediti uzastopnim širenjem uzorka kao što je napravljeno u početnim koracima već se moraju graditi određena poopćenja.
Izgrađena tablica se proširuje novim zapažanjima te se istražuju svojstva dobivenih vrijednosti i kako su oni povezani sa brojem (figure) koraka.

Faza 2. Razvoj numeričkih veza do pravila funkcije

Aktivnost 3.2 Dopuni tablicu novim zapažanjima te istražuj svojstva dobivenih vrijednosti i kako su oni povezani s brojem (figure) koraka.



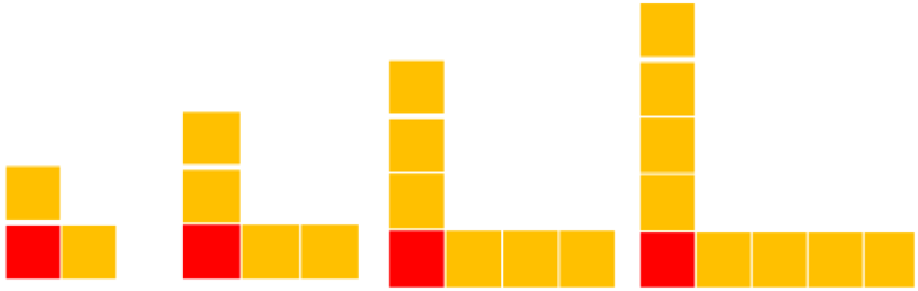
n	1	2	3	4	5	6	...	10	58
f(n)	3	5	7	9	11				
rekruzivno	1+2	3+2	5+2	7+2	9+2				
Opisujemo proces	1+2	2+3	3+4	4+5	5+6			10+11	58+59
Opisujemo proces	1+2	1+2+2=1+4	1+6	1+8	1+10			1+20	1+116
ostvarujemo veze	1+2·1	1+2·2	1+2·3	1+2·4	1+2·5			1+2·10	1+2·58

n	f(n)
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15
8	17
9	19
10	21
11	23
12	25

Faza 2. Razvoj numeričkih veza do pravila funkcije

Aktivnost 4. Nakon opisa riječima postavi algebarski izraz koji povezuje broj figure sa brojem elemenata u toj figuri.=> funkcija

Koliko kvadrata da napravim n-tu figuru?
Napiši izraz za n-tu figuru



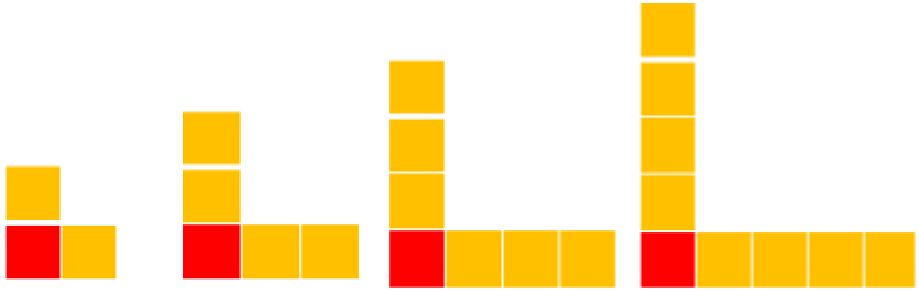
n	1	2	3	4	5	6	…	10	…	58	…	n
ukupno	3	5	7	9	11							
proces	1+2·**1**	1+2·**2**	1+2·**3**	1+2·**4**	1+2·**5**			1+2·**10**		1+2·**58**		**1+2n**

n-ta figura ima 2n+1 kvadrata,

f(n)=2n+1, $n \in N$

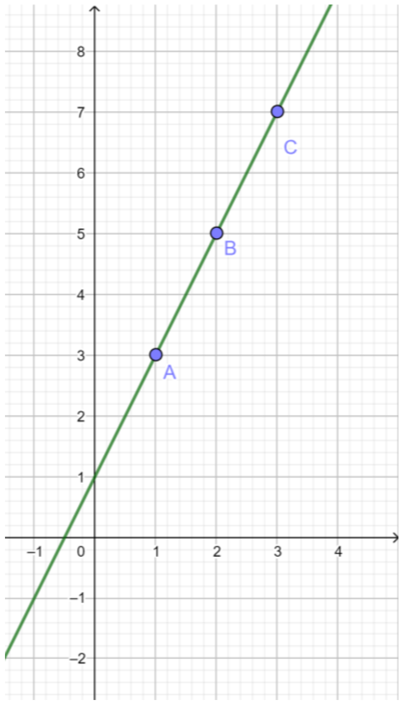
Faza 3. Produljena analiza uzorka

Aktivnost 5. opisujemo pripadnu funkciju, istražujemo svojstva, ispitujemo određene tvrdnje, tumačimo točke grafa, povezujemo različite prikaze i sl.;
srodni uzorci mogu se međusobno uspoređivati; mogu se crtati u istom koordinatnom sustavu, uočavati njihova svojstva, vrste odnosa



n-ta figura ima 2n+1 kvadrata

f(n)=2n+1, n∈ $\boldsymbol{N}$



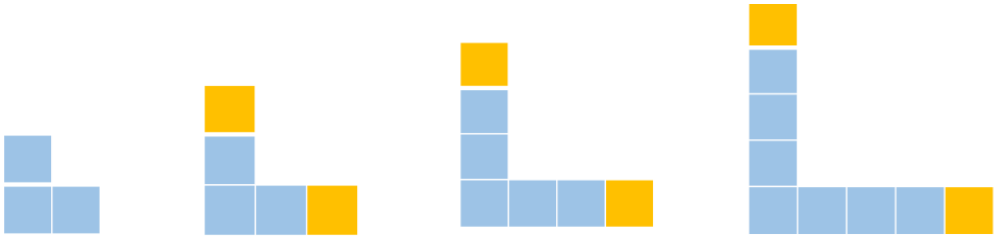
Na temelju pravila funkcije može se odrediti broj elemenata za bilo koju figuru, ali i provjeriti može li se u nekoj figuri nalaziti određeni broj elementa.

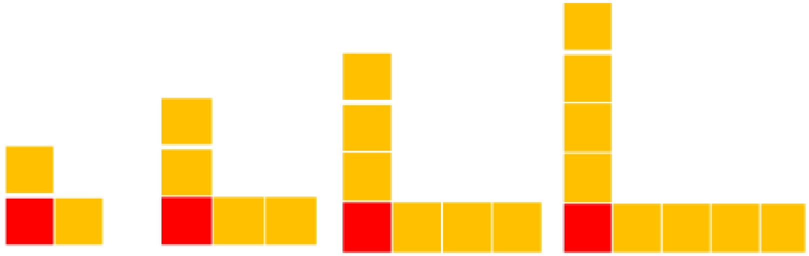
1. Koliko elemenata ima 100. figura?
2. Može li neka figura imati 100 osnovnih elemenata?

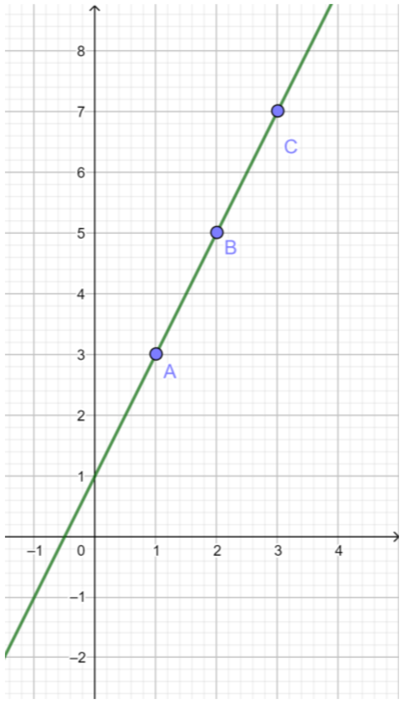
1. f(100)=?
2. f(n)=100 n=?
3. Vrijedi li f(100)=10f(10)

afina funkcija f(x)=2x+1, x∈ $\boldsymbol{R}$

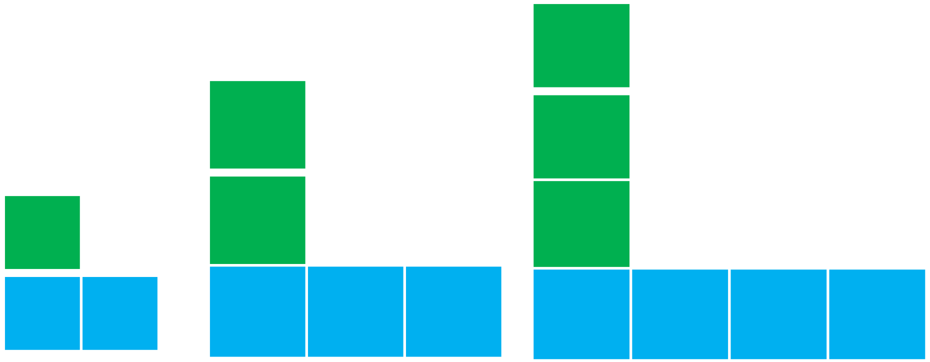
Rezime







1	2	3
1+2	2+3	3+4
n+(n+1)		



n-ta figura ima 2n+1 kvadrata

f(n)=2n+1 n$\in \mathbb{N}$

afina funkcija f(x)=2x+1, x$\in \mathbb{R}$

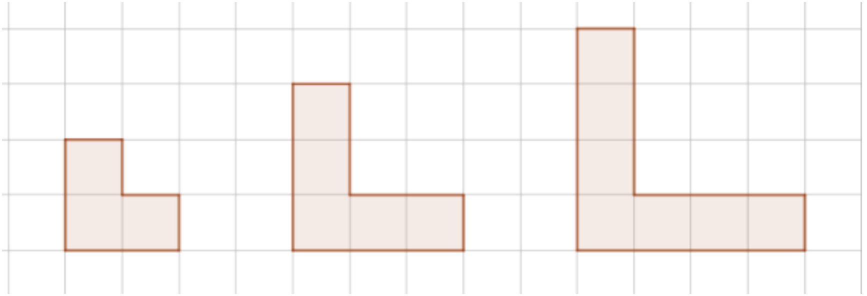
Uloga boje!

Ne postoji najbolja metoda.
Svatko „doživljava” uzorak na svoj način.
Različiti načini figuralnog spoznavanja

Proučavanje ekvivalentnih izraza

1	2	3
1+1+1	1+2+2	1+3+3
1+n+n		

Šalabahter



1.Faza	Promišljanje o figurama koristeći se vizualnim karakteristikama zadanog geometrijskog uzorka	Kako bi nacrtao slijedeću figuru u nizu? Kako bi nacrtao 10.figuruu nizu? Kako bi nacrtao 58.figuru u nizu? Kako bi nekome opisao kako da nacrta bio koju figuru u nizu?
2.Faza	Razvoj numeričkih veza da generaliziramo funkciju	Koliko mi pojedinih kvadrata treba da napravim 10.figuru u nizu, a 58., a 100? Koliko kvadrata da napravim n-tu figuru? Napiši izraz za n-tu figuru
3.Faza	Produljena analiza uzorka	Koja figura ima točno 100 kvadrata? A 50? *Možeš li sastaviti problemski zadatak s uzorkom za ekipu?*

Ak1. Što se mijenja, a što ostaje isto?
Na koji način se mijenja nekoliko slijedećih u odnosu na prethodni. Opiši riječima

Ak2. Na temelju uočene promjene koja se dešava iz koraka u korak (iz figure u figuru gradi slijedećih nekoliko figura, članova niza. Kreiraj tablicu!

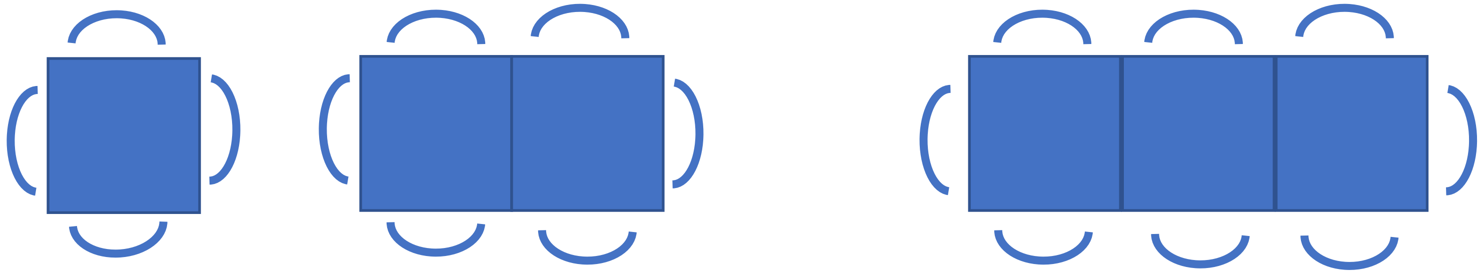
Ak3. Na temelju uočenog pravila vrši predviđanje za izgled figure u proizvoljnom koraku
Dopuni tablicu novim zapažanjima te istražuj svojstva dobivenih vrijednosti i kako su oni povezani s brojem (figure) koraka.

Ak 4.Nakon opisa riječima postavi algebarski izraz koji povezuje broj figure sa brojem elemenata u toj figuri.=> funkcija

Ak.5. Analiza funkcije/uspoređivanje srodnih uzoraka

Što još možemo?

Promišljanje o kontekstu, procesima, ishodima / složenosti

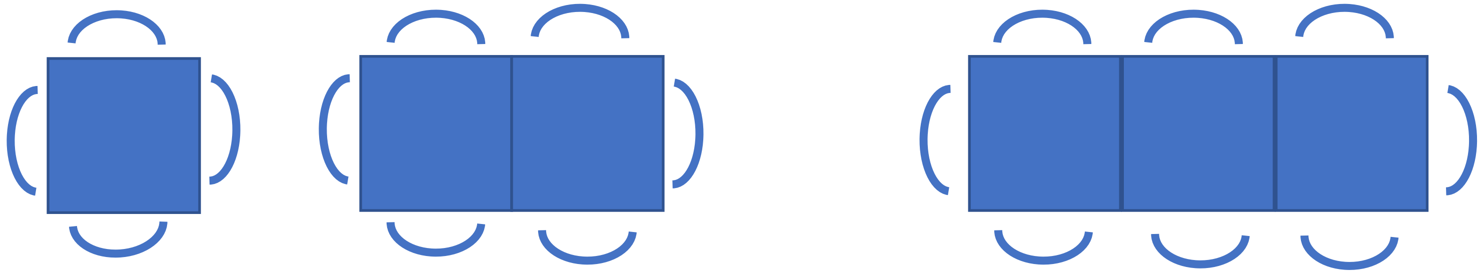


U restoranu stolovi se mogu postaviti samo u dugom redu. Odredite koliko najviše može biti ljudi koji mogu sjediti oko tako postavljenih stolova .

1. Nacrtajte 4 stola i odgovarajuće stolice.
2. Koliko stolica može biti postavljeno oko 5 stolova? A oko 6 stolova?
3. Za zabavu postavljeno je 18 stolova s pripadnim stolicama. Koliko gostiju može sjesti ? Objasnite kako ste došli do rezultata.
4. Ako je 42 osoba pozvano na rođendan koliko minimalno stolova treba biti postavljeno na takav način. Objasnite kako ste došli do rezultata.
5. Objasnite svojim riječima pravilo koje opisuje vezu između broja stolova i broja stolica.

Promišljanje o kontekstu, procesima, ishodima / složenosti

Npr. afina/linearna funkcija, opseg, površina kvadrat, „vidjeti problem"…šibice



U restoranu stolovi se mogu postaviti samo u dugom redu. Odredite koliko najviše može biti ljudi koji mogu sjediti oko tako postavljenih stolova .

a) Odredite opće pravilo za ukupan broj stolica u bilo kojoj figuri u nizu

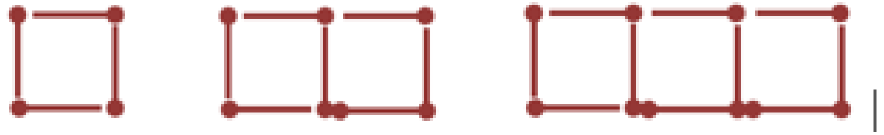
b) Opišite funkciju f prikazanu tim nizom.

c) Objasnite što znači f(30) i koliko on iznosi.

d) Vrijedi li f(30)=5f(6) ?

e) Može li u nekoj figuri biti 1000 stolica? Objasnite.

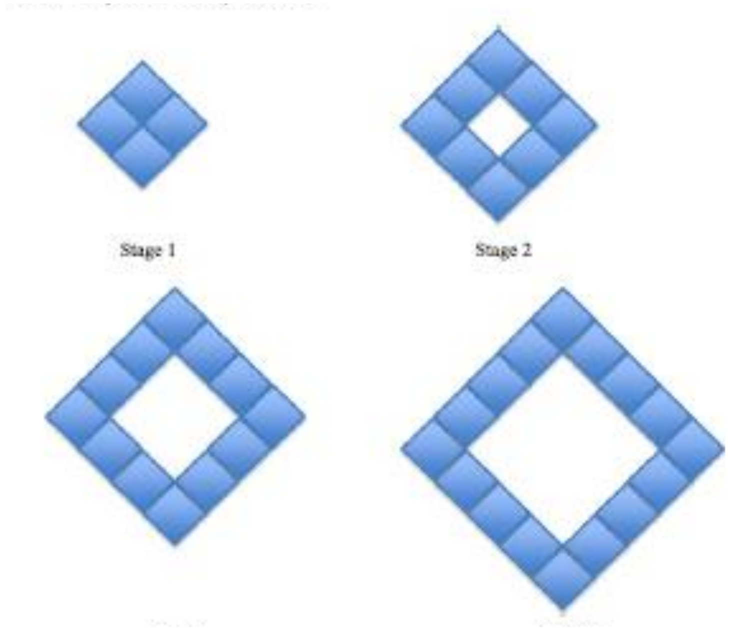
Ako je opseg 120 figure …. Kolika je njena površina?
Koliko šibica nam je potrebno za napraviti bilo koju figuru?

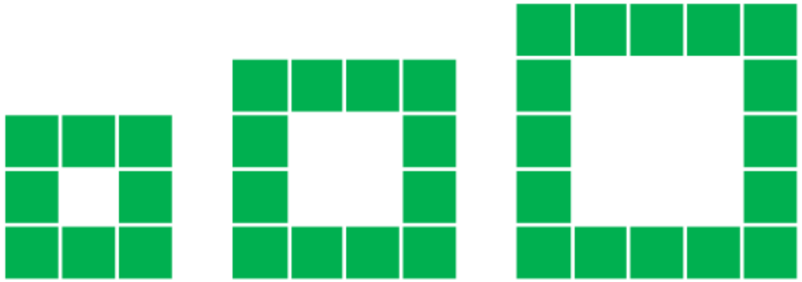


Velika uloga učitelja u formulaciji problema

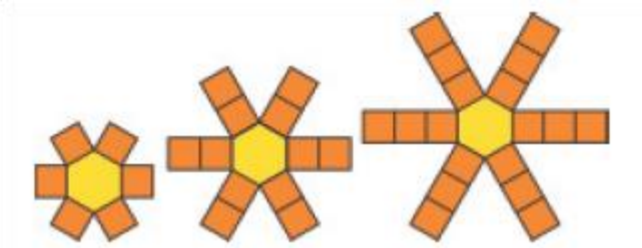
Promišljanje o kontekstu, procesima, ishodima / složenosti

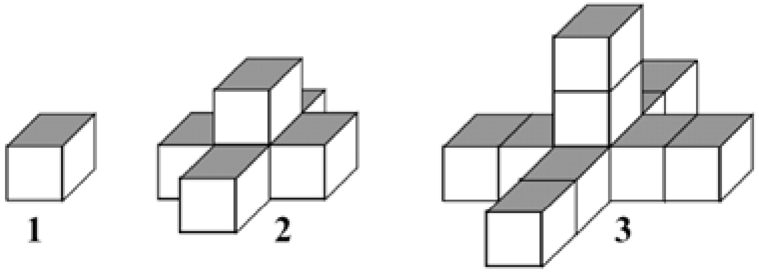
razumijevanje osnovnih geometrijskih koncepata / domena Oblik i prostor, Mjerenje

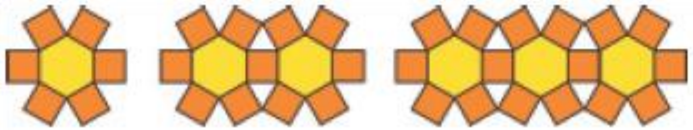




- ✓ Otkrivati različite strategije
- ✓ Komunicirati o različitim strategijama, argumentirati
- ✓ Povezivati prikaze

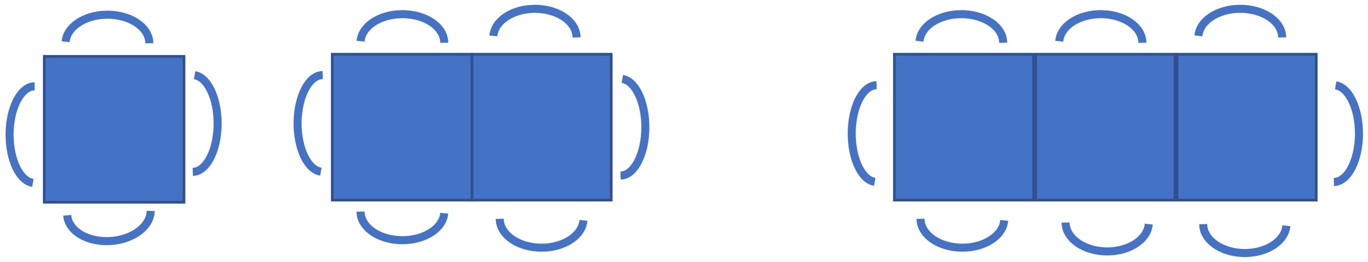






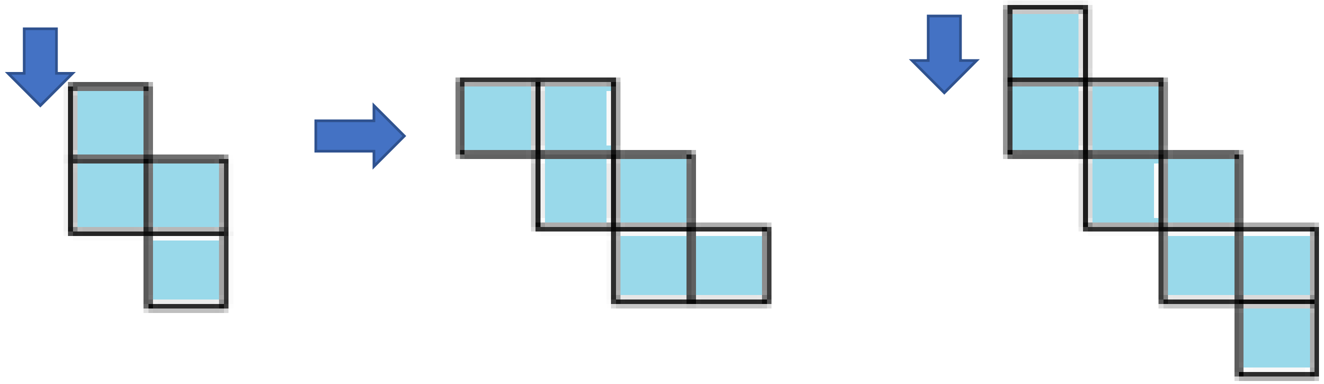
Promišljanje o kontekstu, procesima, ishodima / složenosti

a)



Od figuralnog promišljanja preko numeričkog do generalizacije

b)



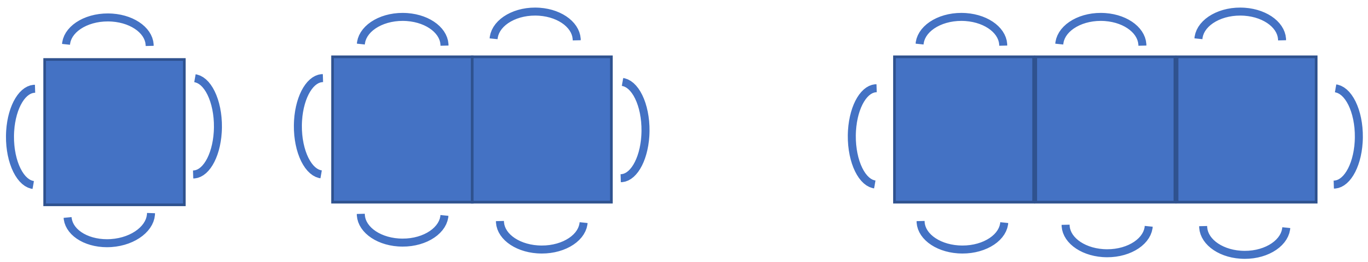
a) Broj stolica – opseg
b) Broj kvadrata

=> $f(x)= 2(x+1)$

✓ Različiti uzorci opisuju istu funkciju - različite situacije/kontekste možemo opisati istom funkcijom

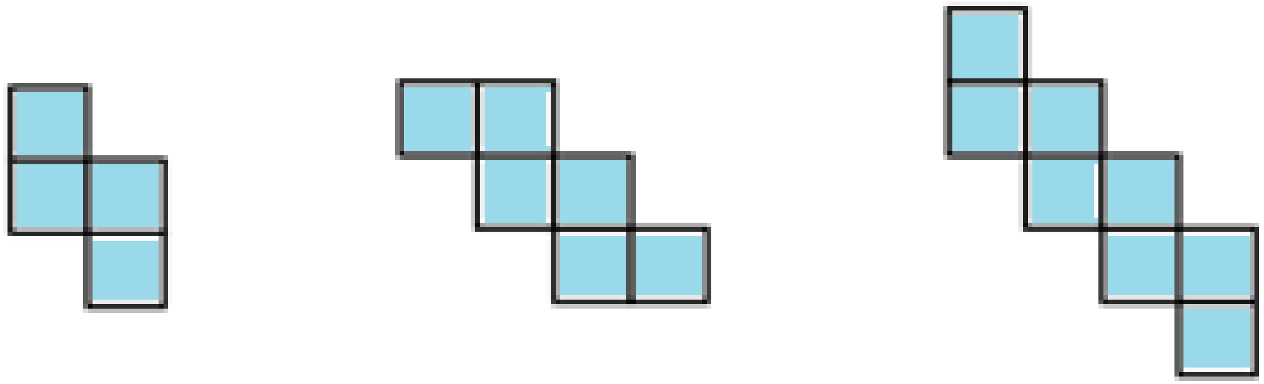
Promišljanje o kontekstu, procesima, ishodima / složenosti

a)



Broj stolica/opseg
$f(x)=2(x+1)$
Broj šibica za kreiranje uzorka
$h(x)=3x+1$

b)

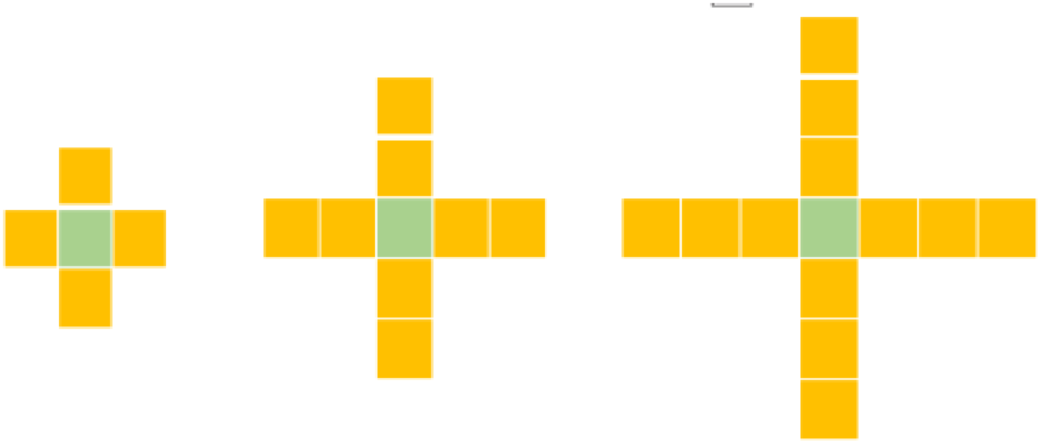


površina/ukupan broj kvadrata
$f(x)= 2(x+1)=2x+2$
opseg
$g(x)=2(2x+3)= 4x+6$

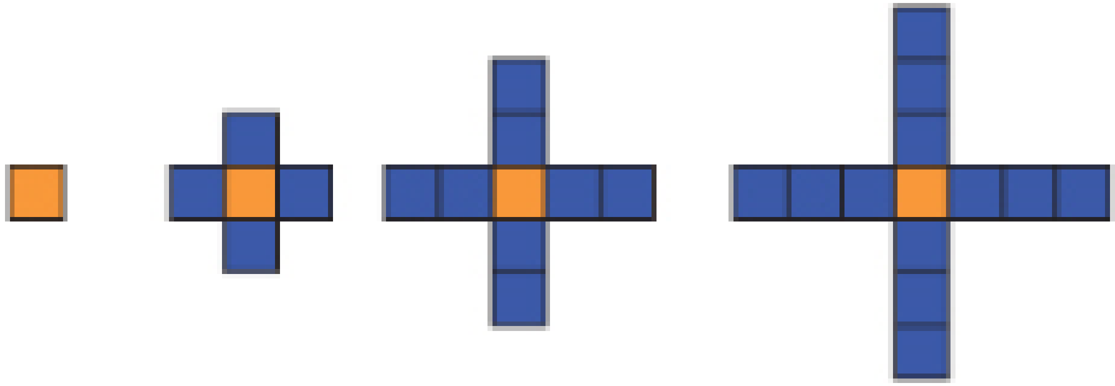
Paziti na značenje varijabli i simboličke/formalne zapise, npr. x- ukupan broj kvadrata ili površina jediničnog kvadrata

✓ U jednom uzorku možemo otkrivati i analizirati različite funkcije, uspostavljati veze među različitim konceptima

Opisuju li ovi rastući geometrijski uzorci istu funkciju ?



1 2 3



1 2 3 4

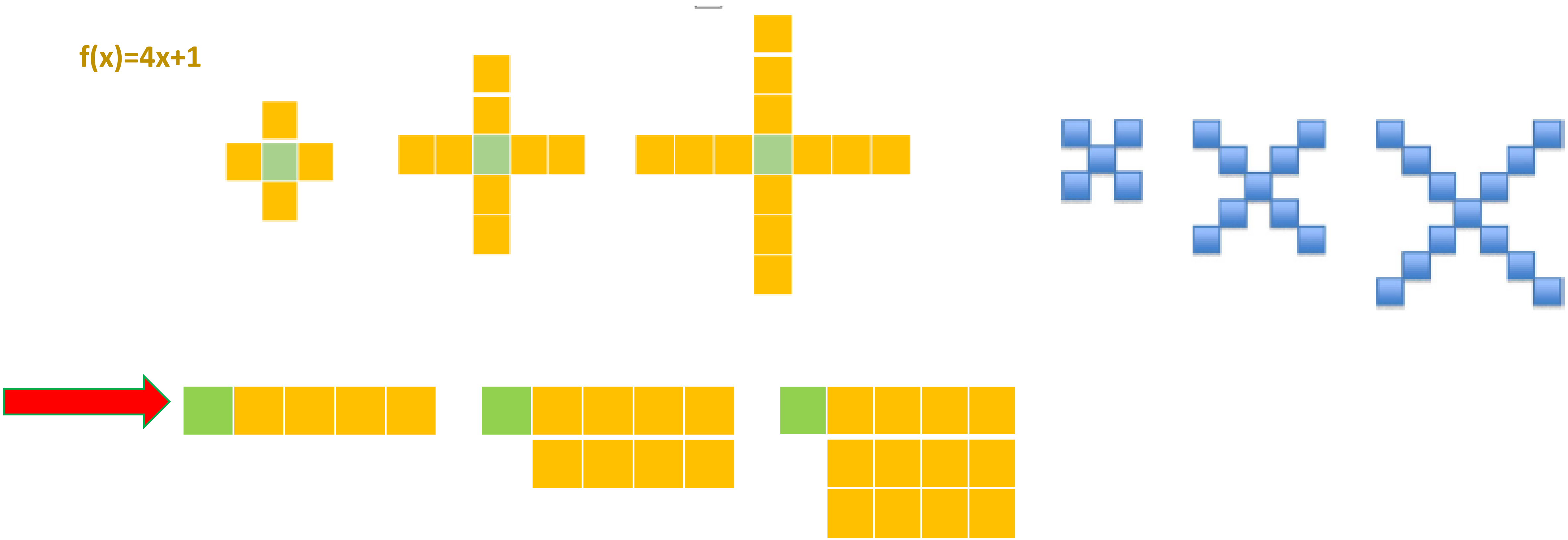
x	y	
1	5	1+4·1
2	9	1+4·2
3	13	1+4·3

f(x)=4x+1

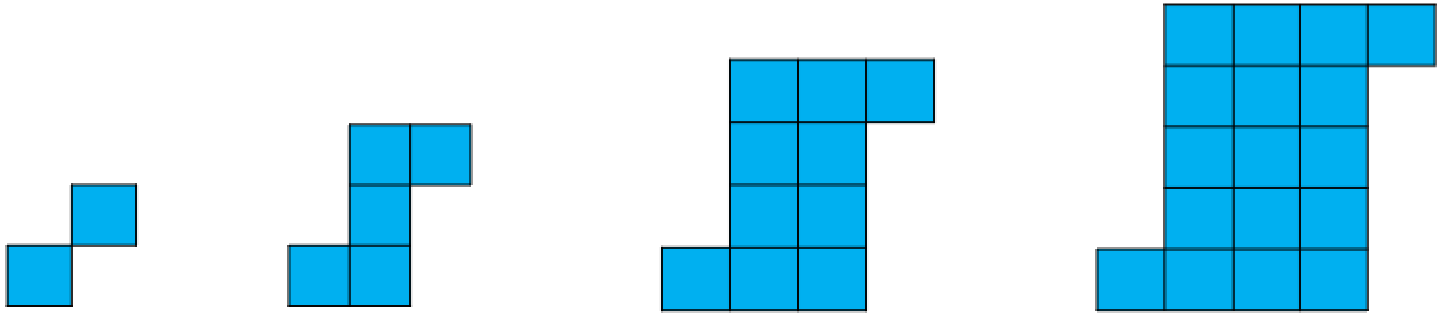
x	y
1	1
2	5
3	9
4	13

f(x)=4x-3

Presložimo i pojednostavimo
Vizualizacija pomaže generalizaciji



Nelinearni rastući geometrijski uzorak

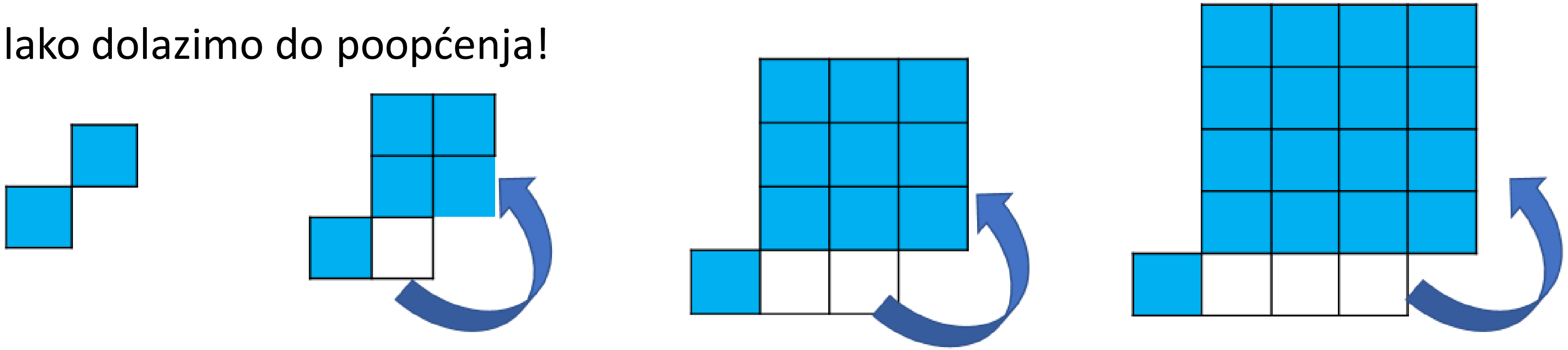


n	**1**	**2**	**3**	**4**
Proces	2+0	2+3=2+3*1	2+4+4=2+2*4	2+3*5
Ukupno	2	**5**	**10**	**17**

$f(n)$ =2+(n-1)(n+1)

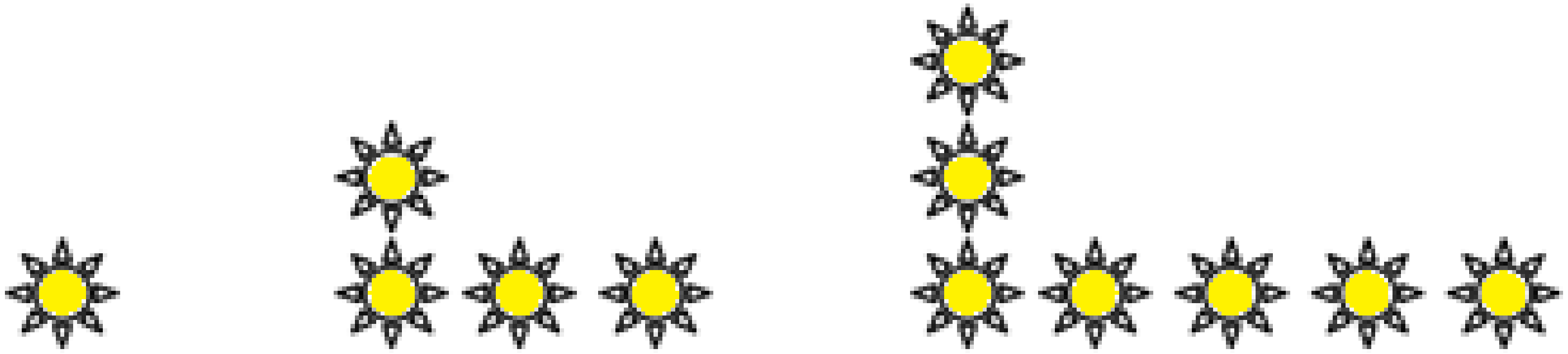
$f(n) = n^2$+1

Presložimo… i lako dolazimo do poopćenja!

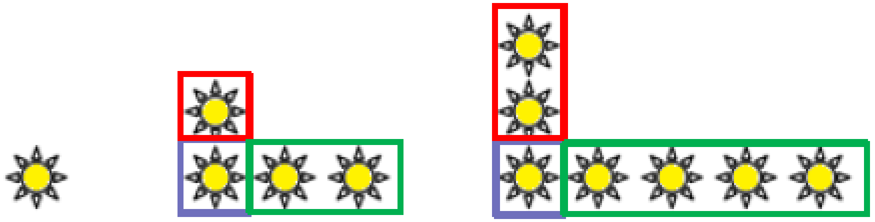


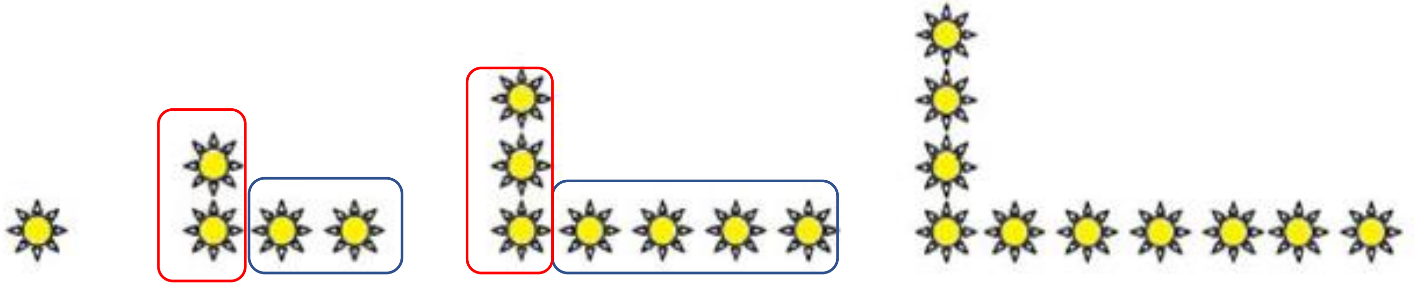
Rasprava…

Primjer s ulazne ankete



Primjer.
Varijanta 1.





- Jedan cvijet ostaje nepromijenjen
- Iznad se dodaje po jedan
- Desno se dodaju po dva
- U svakom koraku se dodaju 3 nova

n	1	2	3	4	5	6	...	20	100
C(n)	1	4	7	10	13	16			

+3 +3

- 1. ima 1 cvijet
- 2. ima 2 + 2 cvijeta (2·1)
- 3. ima 3 + 4 cvijeta (2·2)
- 4. ima 4 + 6 cvjetova (2·3)
- 5. ima 5 + 8 cvjetova (2·4)
- ...
- 20. ima 20 + 38 cvjetova (2·19)
- 100. ima 100 + 198 cvjetova (2·99)

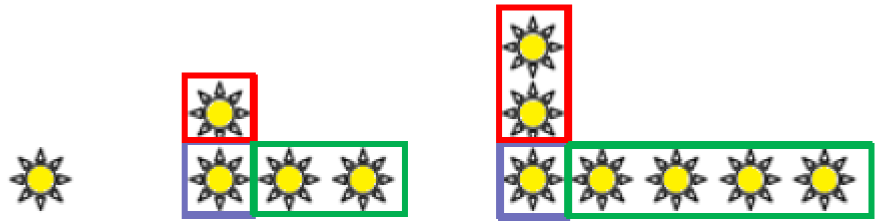
n-ta figura ima $n + 2 \cdot (n-1)$ cvjetova,
odnosno $3n - 2$ cvijeta.

$C(n)$ – broj cvjetova

$C(n) = 3n - 2,\ n \in N$

Jesmo li mogli drugačije?

Primjer Varijanta 2.



- Jedan cvijet ostaje nepromijenjen
- Iznad se dodaje po jedan
- Desno se dodaju po dva
- U svakom koraku se dodaju 3 nova

n	1	2	3	4	5	6	...	20	100
C(n)	1	4	7	10	13	16			

f(n)=3n-2

+3 +3

n	1	2	3	4	5
c(n)	1	4	7	10	13
	1	1+3	1+3+3	1+3+3+3	1+3+3+3+3
		1+3***1**	1+3***2**	1+3***3**	1+3***4**

n
1+3*(n-1)=1+3n-3=3n-2

Raspravlja…

Proučavanje ekvivalentnih izraza
Proučavanje strategija rješavanja

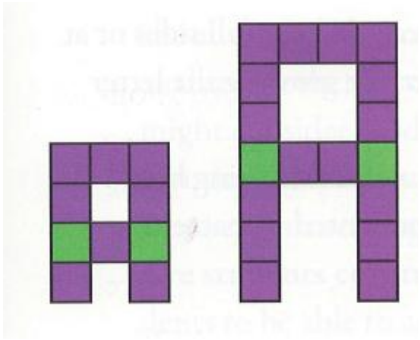
Vesna je odredila opće pravilo **n+2(n-1)**, a Robi **1+3(n-1).**

Objasnite na koji su način Robi i Vesna došli do svog izraza.

f(n)=3n-2

Što još možemo ?

✓Osmisliti zadatak s rastućim geometrijskim uzorkom



✓Odrediti opće pravilo ako su dane dvije neuzastopne figure geometrijskog uzorka

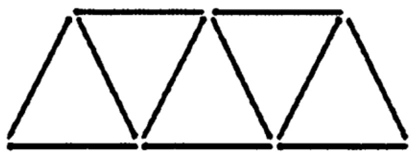


figura 3

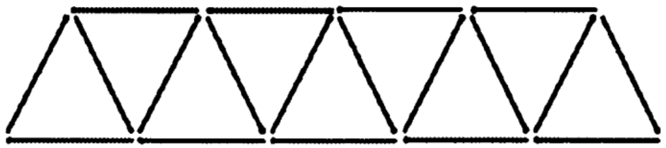


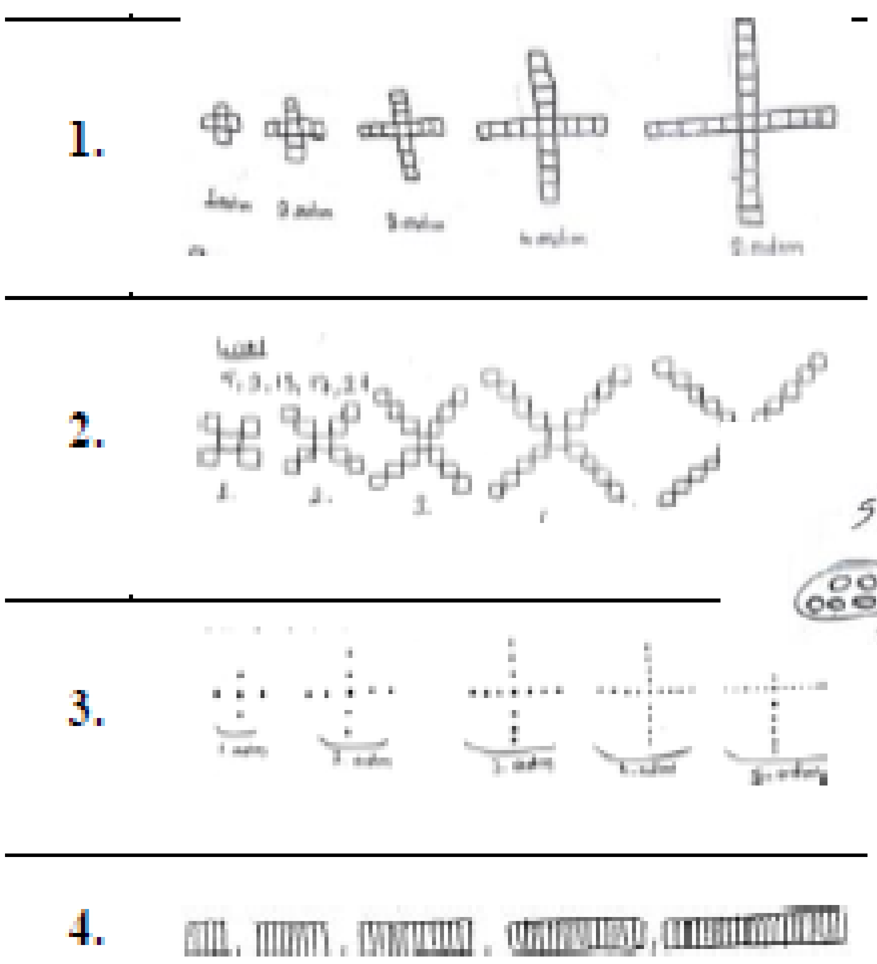
figura 5

✓Na temelju zadane funkcije ili algebarskog izraza kreirati geometrijski uzork

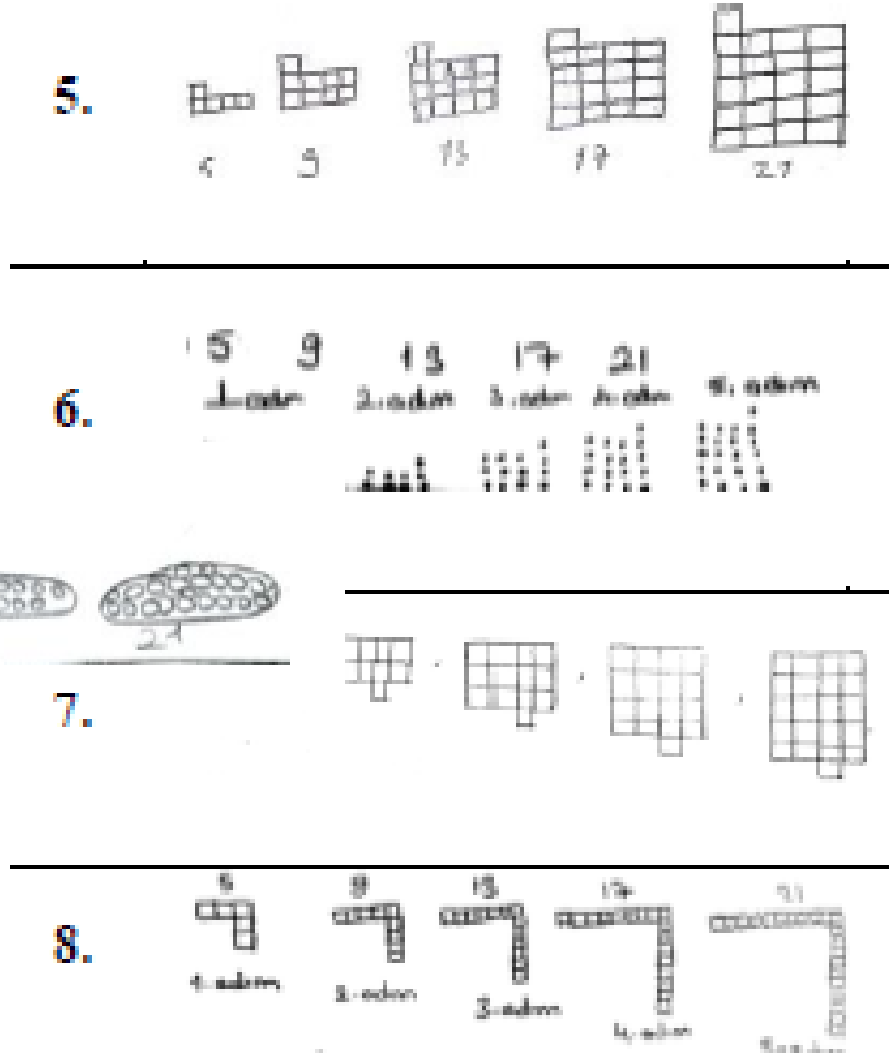
Možete li kreirati geometrijski uzorak od prvih pet koraka temeljem algebarskog izraza/pravila **4n+1**

Od algebarskog izraza do geometrijskog uzorka

Što znači 4n+1
Što znači f(x)=4x+1



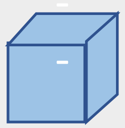
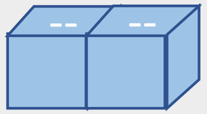
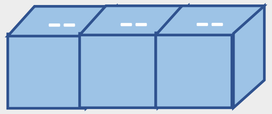
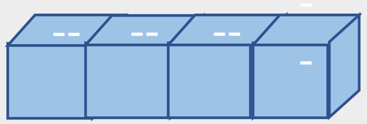
Fokus na numerički uzorak
Koncept funkcije!



Kılıç, Ç . (2017).

Promjena uloge učitelja

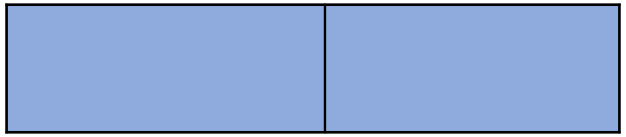
Postupnost, primjerenost, pitanja

	1.Tijelo	2.Tijelo	3.Tijelo	4.tijelo	…	10 tijelo	100 tijelo	n-to tijelo
Slika								
Ukupan broj kocki								
Obujam figure/tijela								
Broj ploha koje omeđuju figuru								
Oplošje figure/tijela								

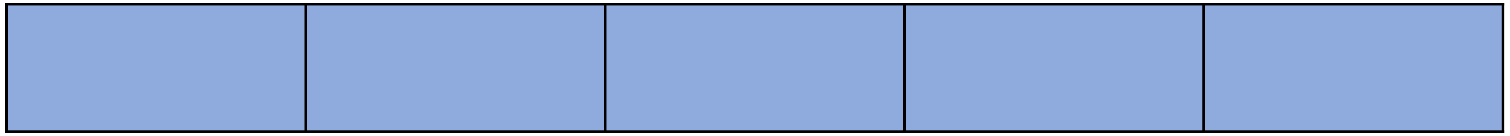
Broj figure n	Model/slika	Pisani opis	proces	Numerička vrijednost

Domaća zadaća

- U ovoj figuri možete prebrojati 3 pravokutnika.



- Promotrite figuru koja se sastoji od 5 jediničnih pravokutnika.



1. Koliko pravokutnika, bilo kojih dimenzija možete prebrojati?
2. A ako se figura sastoji od 10 jednakih pravokutnika?
3. Koliko pravokutnika bilo kojih dimenzija možete prebrojati?
4. Odredite algebarski izraz (opće pravilo) koji prikazuje broj pravokutnika bilo kojih dimenzija u figuri koja se sastoji od *n* jediničnih pravokutnika.

bpiton@unipu.hr

… zaključak

Geometrijski uzorak moćan alat za

- ✓ razvoj i njegovanje matematičkih oblika mišljenja i zaključivanja
- ✓ razvoj algebarskog mišljenja
- ✓ razvoj funkcijskog mišljenja; koncepta funkcije
- ✓ razvoj vizualizacije
- ✓ razvoj i njegovanje procesa rješavanja problema
- ✓ uvod u dokazivanje
- ✓ daje balans između proceduralnog i konceptualnog znanja

- ✓ **Za drugačije pedagoške prakse i načine poučavanja; okruženje učenja**
- ✓ Uloga učitelja

- *Promatram, promišljam, povezujem*
- *Pričam, raspisujem, crtam, koristim boju*
- *Uspostavljam vezu između broja figure i broja elemenata figure, povezujem*
- *Koristim tablicu, Uvodim varijable*
- *Preslagujem, transformiram*
- *Argumentiram, generaliziram, provjeravam, mogu li drugačije…*

- Započeti s jednostavnim primjerima u kojima se odnosi mogu izraziti jednostavnim računskim operacijama

  (npr. $3n$, $n+3$, n^2)
- Zatim proširivati primjerima koji uključuju i kombinacije računskih operacija

  (npr. $3n+1$, $2n-3$, n^2+1)
- Pri analizi postupno razvijati napredovanje u promišljanju i zaključivanju

Geometrijski uzorak: potencijal i izazov

Geometrijski uzorak: potencijal i izazov

Velike ideje -„pogled odozgo”

Formula blagostanja

radosnog učitelja

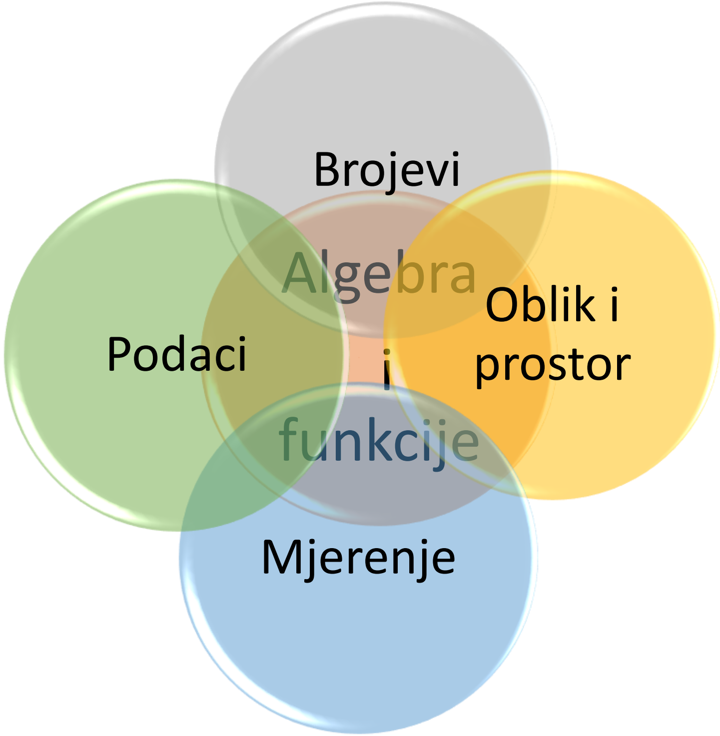
$$B = \frac{Ž^2}{b_t + b_d}$$

B- blagostanje
Ž- žar (radost/angažman)
b – bol
  t-tjelesna
  d- duševna

Iz knjige *Hodati korak po korak,* Erling Kagge
Arne Dekke Eide Næss bio je norveški filozof koji je skovao pojam "duboka ekologija" i bio je važna intelektualna i inspirativna figura unutar ekološkog pokreta s kraja dvadesetog stoljeća.

Anketa

Poziv na suradnju
=> zajednica učenja odgojno-obrazovnih djelatnika



Hvala :-)

Literatura

- Baranović, N. (2019). Razumijevanje koncepta funkcije zadane geometrijskim uzorkom prema teoriji van Hiele-a, Znanstveno-stručni skup s međunarodnim sudjelovanjem: Van Hieleova teorija u matematičkom obrazovanju, Zadar, Hrvatska, 2019.
- Boaler, J. (2015). Mathematical mindsets: Unleashing students’ potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Callejo, M.L., Fernández, C. & García-Reche, A. (2019) Cognitive apprehension in visual pattern generalization problems, Journal for the Study of Education and Development, 42:4, 783-828, DOI: 10.1080/02103702.2019.1652447
- Friel, S. N., & Markworth, K. A. (2009). A Framework for Analyzing Geometric Pattern Tasks. Mathematics Teaching in the Middle School, 15(1), 24–33.
- Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije (KNPM). Narodne novine 7/2019. Available at: https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html (10. 2. 2019.)
- Kılıç, Ç . (2017). The Ability of Pre-Service Primary Teachers to Produce Figural Patterns Based on Algebraic Formulas . Turkish Joumal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT) , 8 (2) , 261-283 . DOI: 10.16949/turkbilmat.329067
- Manfreda-Kolar, V. (2019).Analiza strategija pri rješavanju matematičkih problema, Matematika i škola, 94, 147-153
- Montenegro,P., Costa, P.C. & Lopes, B. (2018) Transformations in the Visual Representation of a Figural Pattern, Mathematical Thinking and Learning, 20:2, 91-107, DOI: 10.1080/10986065.2018.1441599
- Mouhayar, R. (2018) Trends of progression of student level of reasoning and generalization in numerical and figural reasoning approaches in pattern generalization. *Educ Stud Math* **99,** 89–107 . https://doi-org.nukweb.nuk.uni-lj.si/10.1007/s10649-018-9821-8
- Mouhayar, R., & Jurdak, M. (2013). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 379-396. Retrieved February 10, 2021, from http://www.jstor.org/stable/23434469
- Rivera F.D., Becker J.R. (2011) Formation of Pattern Generalization Involving Linear Figural Patterns Among Middle School Students: Results of a Three-Year Study. In: Cai J., Knuth E. (eds) Early Algebraization. Advances in Mathematics Education. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi-org.nukweb.nuk.uni-lj.si/10.1007/978-3-642-17735-4_18
- Slani, N.(2020), Metodika nastave matematike III, FOOZ