BROCARDOVE FIGURE TROKUTA

Goran Knez, Gimnazija Županja

1877. godine Lucas[1] je postavio problem:

Koje bi krivulje pratile kretanje triju pasa koji love jedan drugoga, a kreću iz vrhova jednakokračnog trokuta te trče istovremeno jednakim brzinama?

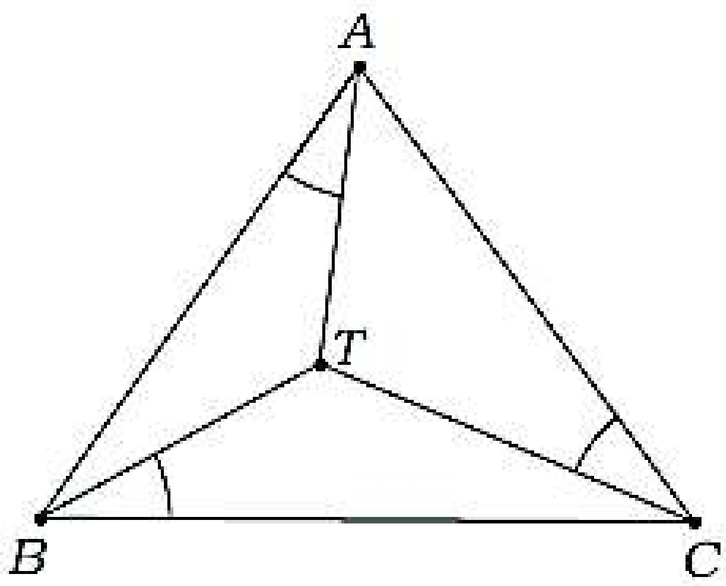
1880. godine Brocard je pokazao kako je krivulja gonjenja svakog psa logaritamska spirala i da bi se svi psi sastali u jednoj točki, Brocardovoj točki trokuta. Kojoj Brocardovoj točki ovisno o smjeru gibanja, u smjeru ili obrnutom smjeru gibanja kazaljke na satu.

[1] francuski matematičar François Edouard Anatole Lucas (1842. – 1891.)

SADRŽAJ:

1. BROCARDOVE TOČKE I BROCARDOV KUT TROKUTA

Neka je dan trokut ABC i točka T unutar trokuta ABC. Spojimo li točku T s vrhovima trokuta i promatramo li kutove koje dužine $\overline{TA}$, $\overline{TB}$ i $\overline{TC}$ zatvaraju sa stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ dobiveni kutovi su općenito različiti (Slika 1). Možemo lako dobiti da su dva od ta tri kuta jednaka, ali nije odmah jasno postoji li točka za koju su sva tri spomenuta kuta jednaka.



SLIKA 1.

- Prema nekim izvorima ove točke otkrio je još 1816. godine njemački matematičar August Leopolde Crelle (1780. - 1855.).

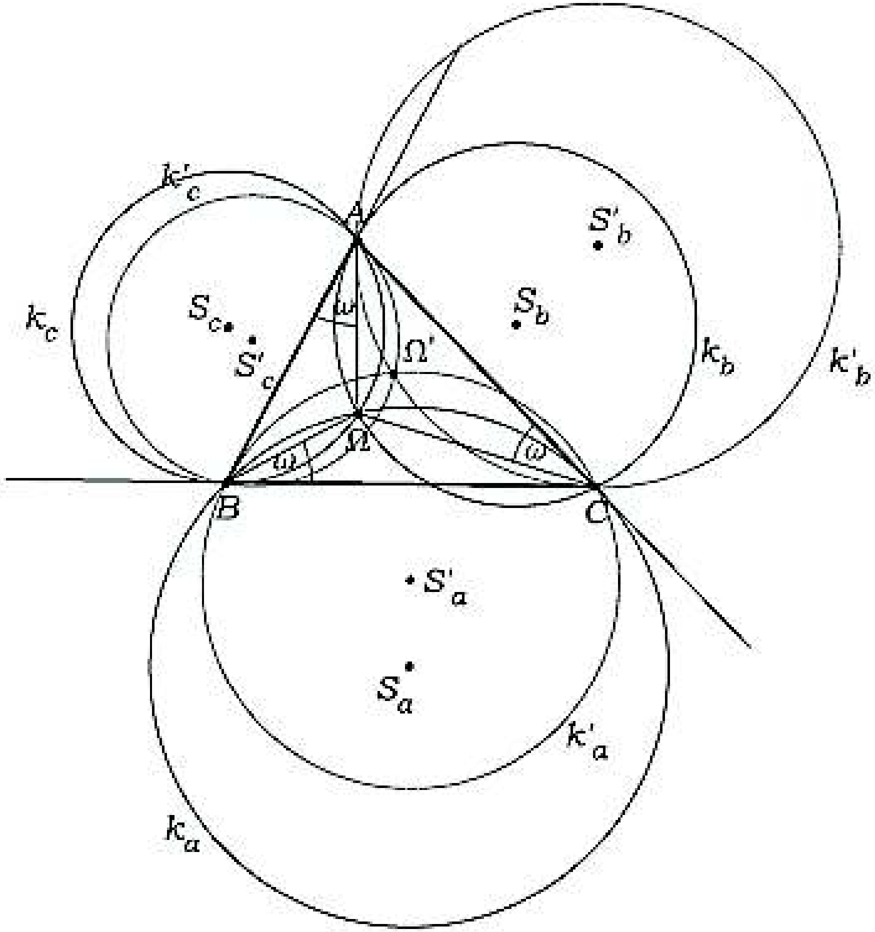
- Nakon njegova otkrića, točke su u jednom kratkom periodu privukle pozornost eminentnih matematičara onog vremena, ali vremenom je taj interes nestao.

Pierre Jean Baptiste Henri Rene Brocard

- Međutim, nakon Brocardovog ponovnog otkrića 1880. godine pojavio se veliki broj radova na tu temu - Lemoine, Neuberg, Mc Cay, Tucker i Schoute.

- Neki od autora navode kako bi povijesno bila opravdana upotreba termina Crelle-Brocardove točke, dok većina suvremenih referenci koristi termin Brocardove točke.

Teorem 1.1. *Za dani trokut ABC neka su dane tri kružnice: k_a koja prolazi točkom B i dira stranicu $\overline{AC}$ u točki C, k_b koja prolazi točkom C i dira stranicu $\overline{AB}$ u točki A, k_c koja prolazi točkom A i dira stranicu $\overline{BC}$ u točki B (Slika 2). Kružnice k_a, k_b i k_c sijeku se u jednoj točki, Ω.*

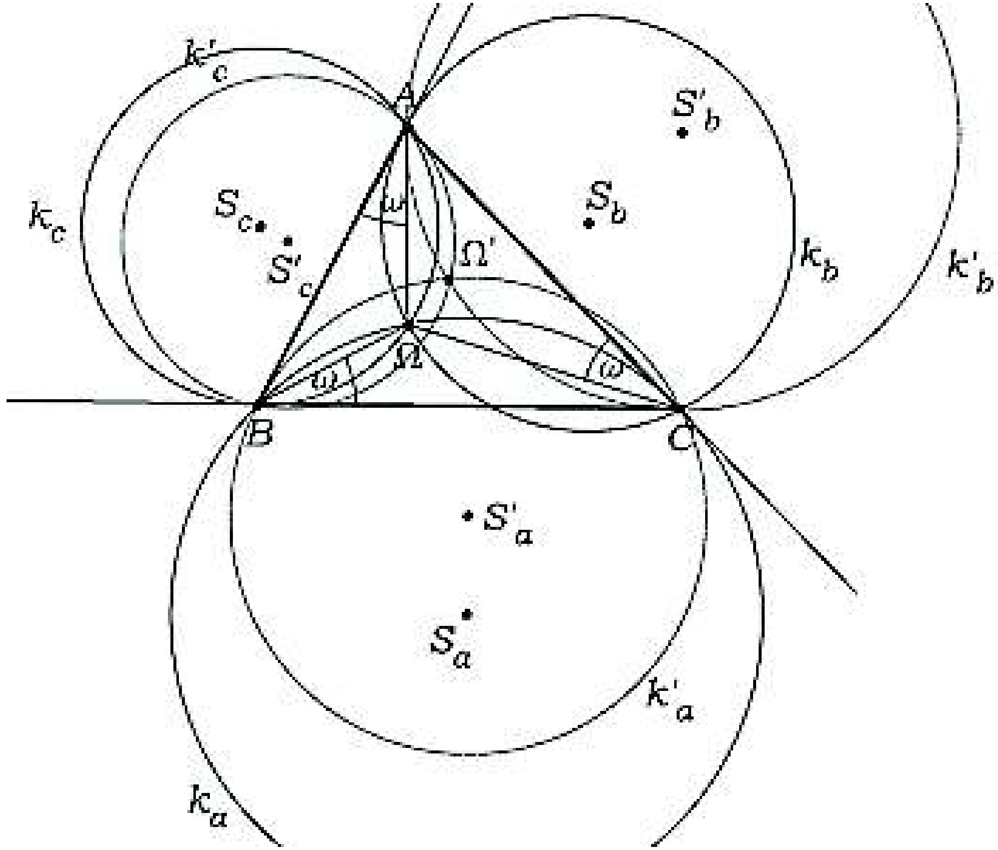


SLIKA 2.

Dokaz. Kružnice k_a i k_c osim zajedničke točke B imaju još jednu zajedničku točku trokuta ABC, označimo je Ω. Kako je BC tangenta kružnice k_c slijedi da je $\angle A\Omega B = 180° - \beta$ i analogno $\angle B\Omega C = 180° - \gamma$. Odavde imamo

$$\angle A\Omega C = 360° - (180° - \beta) - (180° - \gamma) = \beta + \gamma = 180° - \alpha,$$

gdje su α, β i γ unutrašnji kutovi trokuta ABC, odakle slijedi da točka Ω pripada luku kružnice k_b unutar trokuta ABC, što implicira tvrdnju teorema. $\square$



Teorem 1.2. *Za dani trokut ABC neka su dane tri kružnice: k'_a koja prolazi vrhom C i dira stranicu $\overline{AB}$ u vrhu B, k'_b koja prolazi točkom A i dira stranicu $\overline{BC}$ u točki C, k'_c koja prolazi točkom B i dira stranicu $\overline{AC}$ u točki A. Kružnice k'_a, k'_b i k'_c sijeku se u jednoj točki, Ω' (Slika2).*

Teorem 1.3. *Neka su Ω i Ω' točke iz Teorema 1.1 i 1.2. Tada vrijede tvrdnje:*
i) $\angle \Omega AB = \angle \Omega BC = \angle \Omega CA$ i točka Ω je jedina točka s tim svojstvom.
ii) $\angle \Omega' AC = \angle \Omega' CB = \angle \Omega' BA$ i točka Ω' je jedina točka s tim svojstvom (Slika2).

Na temelju dokazanih tvrdnji slijedi definicija.

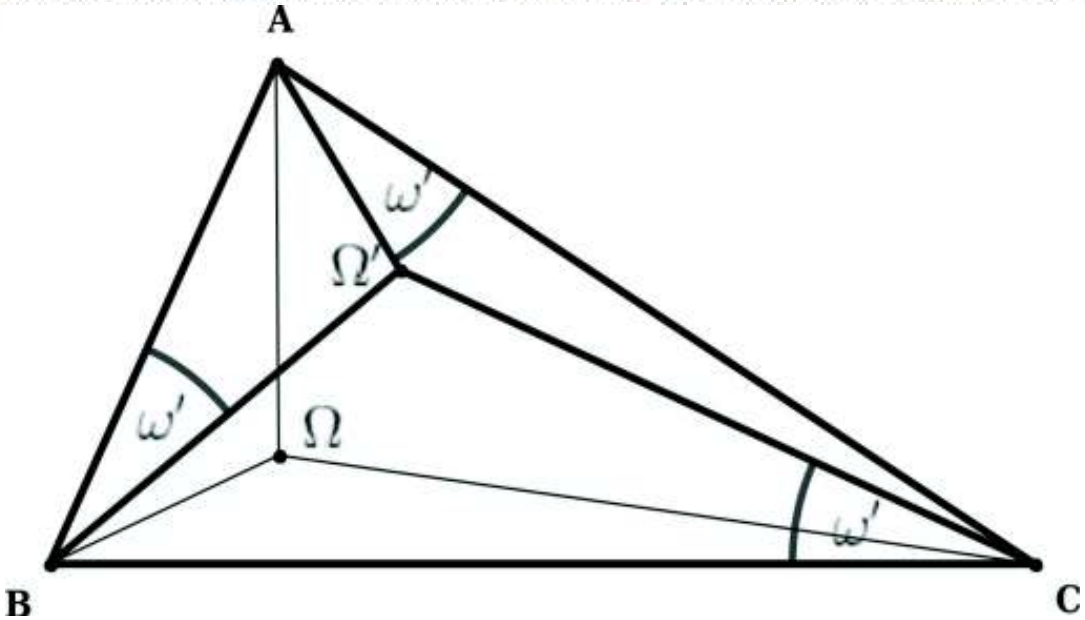
Definicija 1.1. *Za dani trokut ABC točku Ω za koju vrijedi*

$$\angle \Omega AB = \angle \Omega BC = \angle \Omega CA$$

zovemo prvom ili pozitivnom Brocardovom točkom trokuta ABC, a točku Ω' za koju vrijedi

$$\angle \Omega' AC = \angle \Omega' CB = \angle \Omega' BA$$

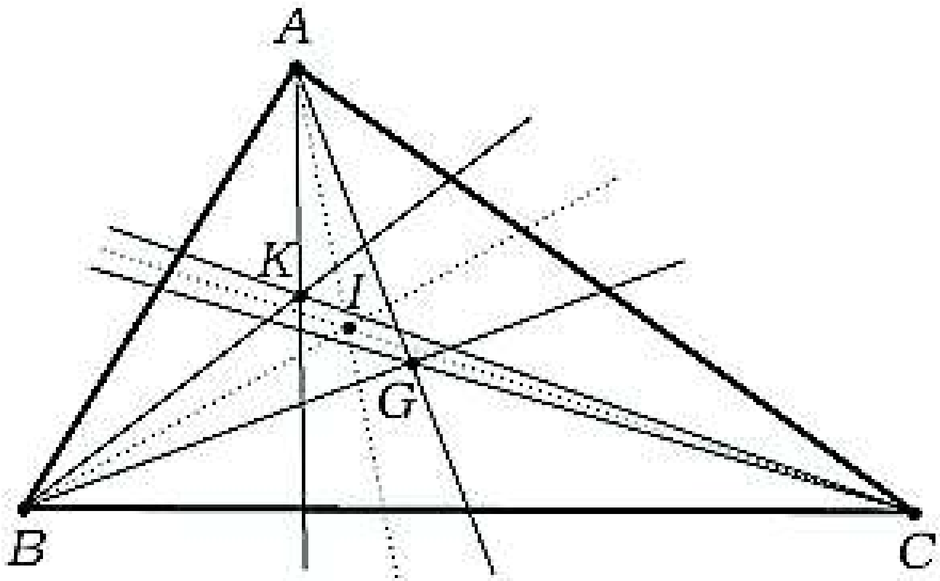
zovemo drugom ili negativnom Brocardovom točkom trokuta ABC.



Prije navođenja svojstava Brocardovih točaka prisjetimo se pojma izogonalnih pravaca i izogonalno konjugiranih točaka.

Definicija 1.2. *Par pravaca koji prolaze vrhom kuta i sa simetralom tog kuta čine sukladne kutove nazivaju se izogonale tog kuta.*

Može se dokazati da ako se tri pravca položena vrhovima danog trokuta ABC sijeku u jednoj točki T_1, tada se i njihove izogonale također sijeku u nekoj točki, označimo je s T_2.
Točke T_1 i T_2 zovemo *izogonalno konjugiranim točkama* ili kraće izogonalnim točkama trokuta ABC.



SLIKA 3.

Izogonalno konjugirana točka središtu upisane kružnice trokuta je sama ta točka, izogonalno konjugirana točka ortocentra trokuta je središte opisane kružnice trokuta, a izogonalno konjugirana točka težišta se zove simedijani centar trokuta (Slika 3).

Teorem 1.4. *Brocardove točke Ω i Ω' su izogonalno konjugirane točke.*

Dokaz. Neka je Ω_1 izogonalno konjugirana točka Brocardovoj točki Ω. Tada vrijedi

$$\angle \Omega AB = \angle \Omega_1 AC,\ \angle \Omega BC = \angle \Omega_1 BA,\ \angle \Omega CA = \angle \Omega_1 CB$$

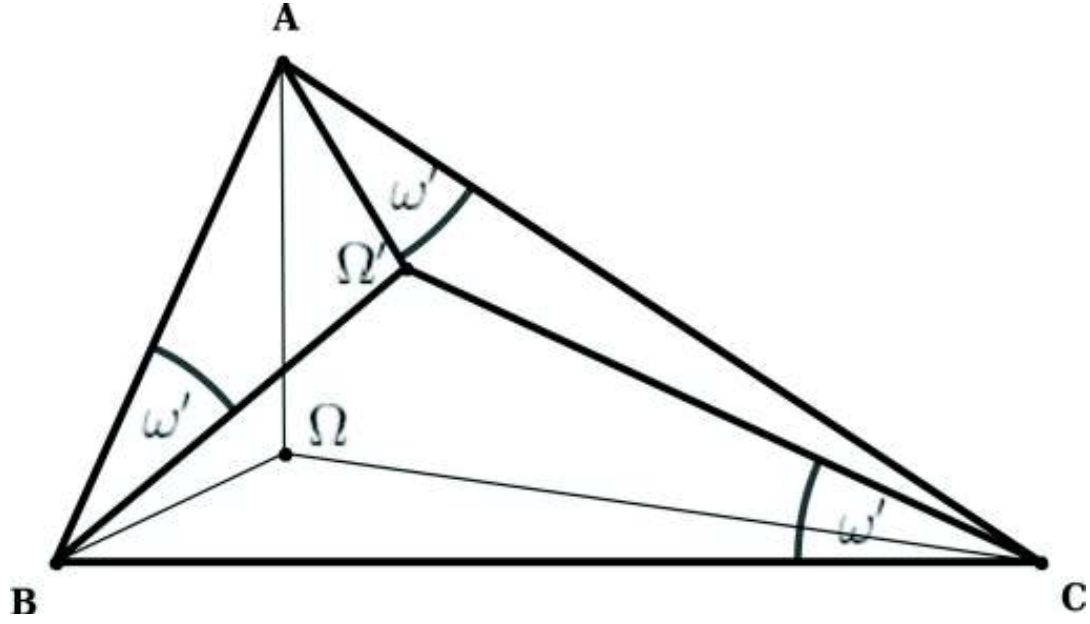
i zbog

$$\angle \Omega AB = \angle \Omega BC = \angle \Omega CA$$

dobivamo

$$\angle \Omega_1 AC = \angle \Omega_1 BA = \angle \Omega_1 CB,$$

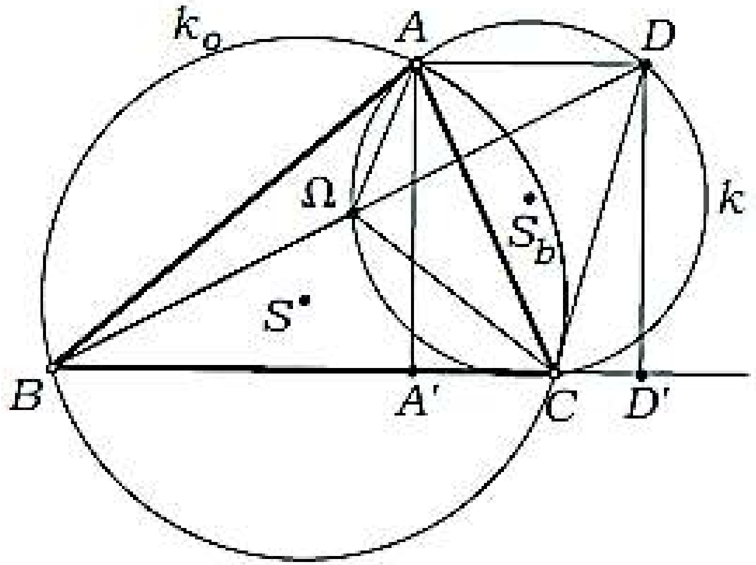
odakle slijedi $\Omega_1 = \Omega'$ što je i trebalo dokazati. $\square$



Definicija 1.3. *$\angle\Omega AB = \angle\Omega' AC$ zove se Brocardov kut trokuta ABC i označava ω.*

Navedimo još jedan način konstrukcije prve Brocardove točke. Konstruiramo kružnicu k_b i kroz točku A paralelu s BC. Označimo drugo sjecište te paralele i kružnice k_b s D. Tada BD siječe kružnicu k_b u točki Ω, a $\angle DBC$ je Brocardov kut trokuta ABC (Slika 4). Naime, vrijedi

$$\angle\Omega AB = \angle\Omega CA = \angle\Omega DA = \angle\Omega BC.$$



SLIKA 4.

Teorem 1.5. *Neka je dan trokut ABC i neka su α, β i γ unutrašnji kutovi trokuta ABC. Tada vrijedi*

$$\cot\omega = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma \tag{1.1}$$

gdje je ω Brocardov kut trokuta ABC.

Prethodna tvrdnja govori na koji način možemo odrediti mjeru Brocardovog kuta poznavajući mjere unutrašnjih kutova trokuta. Identitet (1.1) bi mogao poslužiti kao osnovni definicijski identitet za Brocardov kut jer određuje ω zbog nejednakosti

$$0 < \omega < min\{\alpha, \beta, \gamma\} < \tfrac{1}{2}\pi.$$

.

2. NEJEDNAKOSTI ZA BROCARDOV KUT

Teorem 2.1. *Za Brocardov kut ω trokuta ABC vrijedi nejednakost*

$$\omega \leq \frac{\pi}{6}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut ABC jednakostraničan.

Dokaz. Dokažimo najprije jednakost koja povezuje Brocardov kut trokuta i površinu trokuta. Za površinu P trokuta ABC vrijedi jednakost

$$P = \frac{1}{2} b\, c \sin \alpha, \tag{2.1}$$

a prema kosinusovom poučku vrijedi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \tag{2.2}$$

Posljedica prethodnih dviju jednakosti je formula

$$4P \cot \alpha = -a^2 + b^2 + c^2, \tag{2.3}$$

Slične formule, zbog simetrije, vrijede za $\cot \beta$, $\cot \gamma$. Primjenom jednakosti (1.1) dobivamo formulu

$$4P\cot\omega = a^2 + b^2 + c^2.$$

Dokažimo sada da vrijedi nejednakost

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3}. \tag{2.4}$$

Jednakosti (2.1) i (2.2) impliciraju

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4P\sqrt{3} = 2b^2 + 2c^2 - 4bc\cos(\tfrac{\pi}{3} - \alpha) \geq 2(b-c)^2$$

što dokazuje (2.4). Štoviše, jednakost vrijedi ako i samo ako je $\alpha = \frac{\pi}{3}$ i $b = c$, tj., ako i samo ako je trokut ABC jednakostraničan. (2.3) i (2.4) impliciraju nejednakost $\cot\omega \geq \sqrt{3}$ odnosno traženu nejednakost $\omega \leq \frac{\pi}{6}$. □

Generalizaciju prethodnog teorema su dali ruski matematičari N. A. Dmitriev i E. B. Dynkin.

Teorem 2.3. *Brocardov kut ω zadovoljava nejednakost*

$$\omega^3 \leq (\alpha - \omega)(\beta - \omega)(\gamma - \omega) \tag{2.5}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.

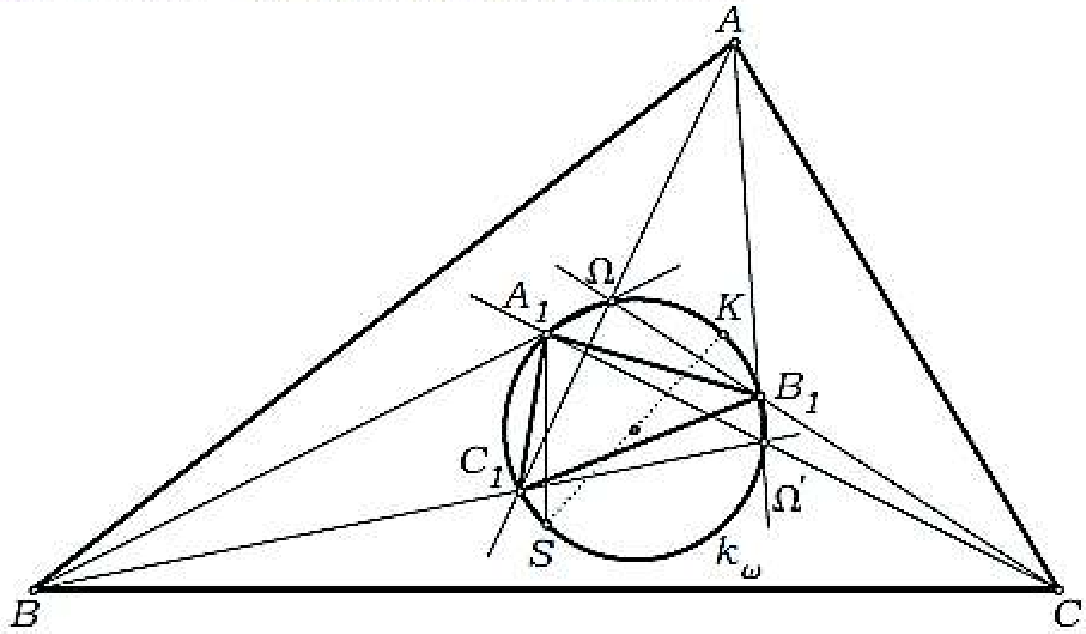
Teorem 2.4. *Brocardov kut ω zadovoljava nejednakost $8\omega^3 \leq \alpha\beta\gamma$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je trokut jednakostraničan.*

P. Yff je 1963. godine pretpostavio da vrijedi nejednakost iz prethodnog teorema. Iako je nejednakost zaintrigirala mnoge matematičare prošlo je više od deset godina prije pojavljivanja prvog dokaza ove nejednakosti. Osnovni razlog zašto je ova nejednakost posebno interesantna je njezin neobičan oblik. Naime, potpuno je neobično da u izrazu u kojem se susreću kutovi trokuta nema funkcija sinus, kosinus ili tangens.

3. BROCARDOVA KRUŽNICA

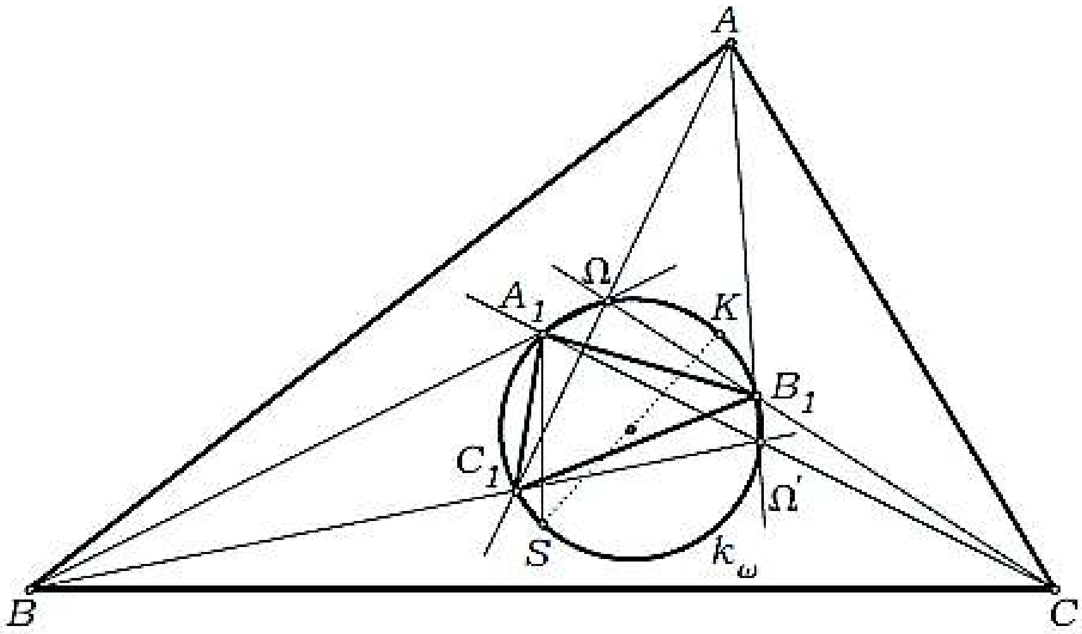
Označimo sjecište pravaca $A\Omega$ i $B\Omega'$ sa C_1 i analogno sjecišta pravaca $B\Omega$ i $C\Omega'$, te $C\Omega$ i $A\Omega'$ sa A_1, odnosno B_1 (Slika 5). Točke $A_1B_1C_1$ su vrhovi trokuta koji smo mogli definirati i na ovaj način.

Definicija 3.1. *Neka su A_1,B_1 i C_1 vrhovi jednakokračnih trokuta konstruiranih nad stranicama danog trokuta ABC kao osnovicama, prema unutrašnjosti danog trokuta, a s kutom uz bazu jednakom Brocardovom kutu. Trokut $A_1B_1C_1$ zovemo prvim Brocardovim trokutom trokuta ABC.*



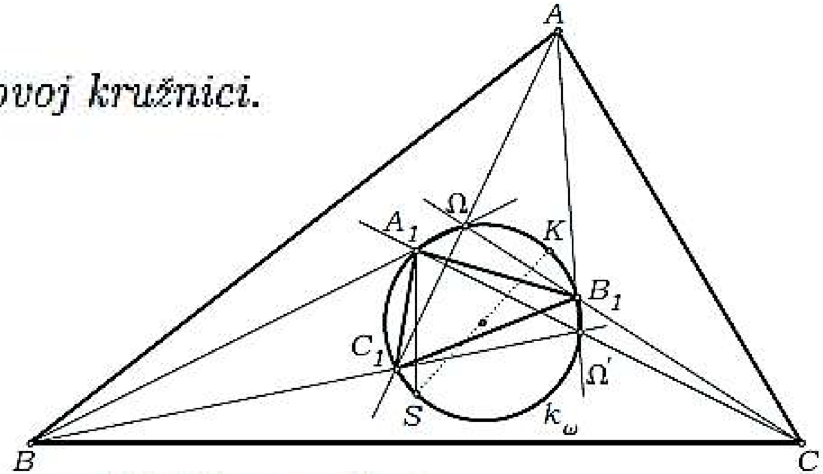
SLIKA 5.

Definicija 3.2. *Kružnicu k_ω opisanu prvom Brocardovom trokutu trokuta ABC zovemo Brocardovom kružnicom trokuta ABC (Slika 5).*



Slika 5.

Teorem 3.1. *Brocardove točke trokuta leže na njegovoj Brocardovoj kružnici.*



Dokaz. Kako za trokut $AB\Omega$ vrijedi $\angle A\Omega B = 180^\circ - \beta$ to za vanjski kut trokuta $AB\Omega$ dobivamo

$$\angle A_1\Omega C_1 = \beta \tag{3.1}$$

Na isti način, promatranjem trokuta $BC\Omega'$ dobivamo

$$\angle A_1\Omega' C_1 = \beta \tag{3.2}$$

Vrijedi i

$$\angle A_1 S C_1 = \beta \tag{3.3}$$

jer su krakovi tog kuta okomiti na BC i AB. Kutove (3.1), (3.2) i (3.3) možemo promatrati kao obodne kutove iste kružnice nad tetivom $\overline{A_1C_1}$. Prema tome, točke A_1, C_1, Ω, Ω' i S leže na jednoj kružnici, označimo je k_ω (Slika 5).

Teorem 3.2. *Dani trokuta ABC i prvi Brocardov trokut $A_1B_1C_1$ su slični trokuti.*

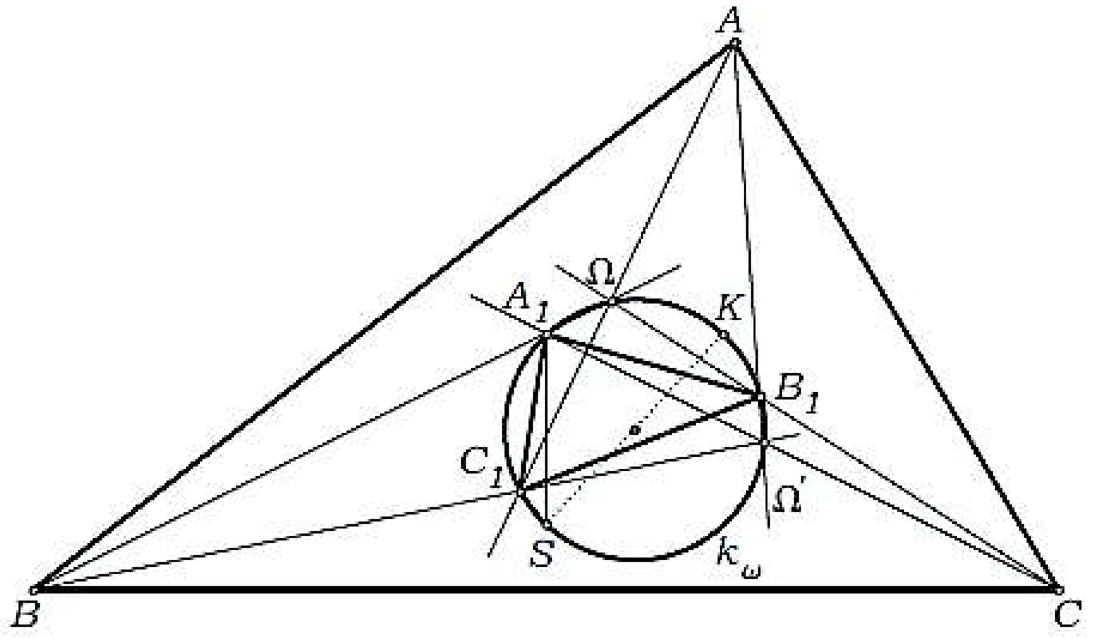
Dokaz. Iz dokaza prethodnog teorema slijedi da su $\angle A_1\Omega' C_1$ i $\angle A_1B_1C_1$ obodni kutovi kružnice k_ω nad tetivom $\overline{A_1C_1}$ pa imamo

$$\angle A_1\Omega' C_1 = \beta = \angle A_1B_1C_1.$$

Slično dobivamo

$$\angle B_1\Omega C_1 = \alpha = \angle B_1A_1C_1,$$

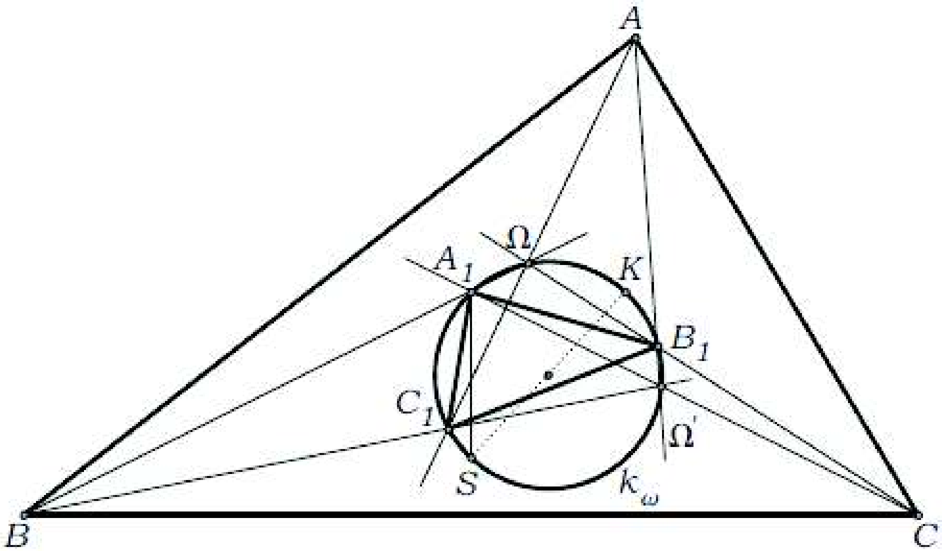
odakle slijedi tvrdnja teorema. □



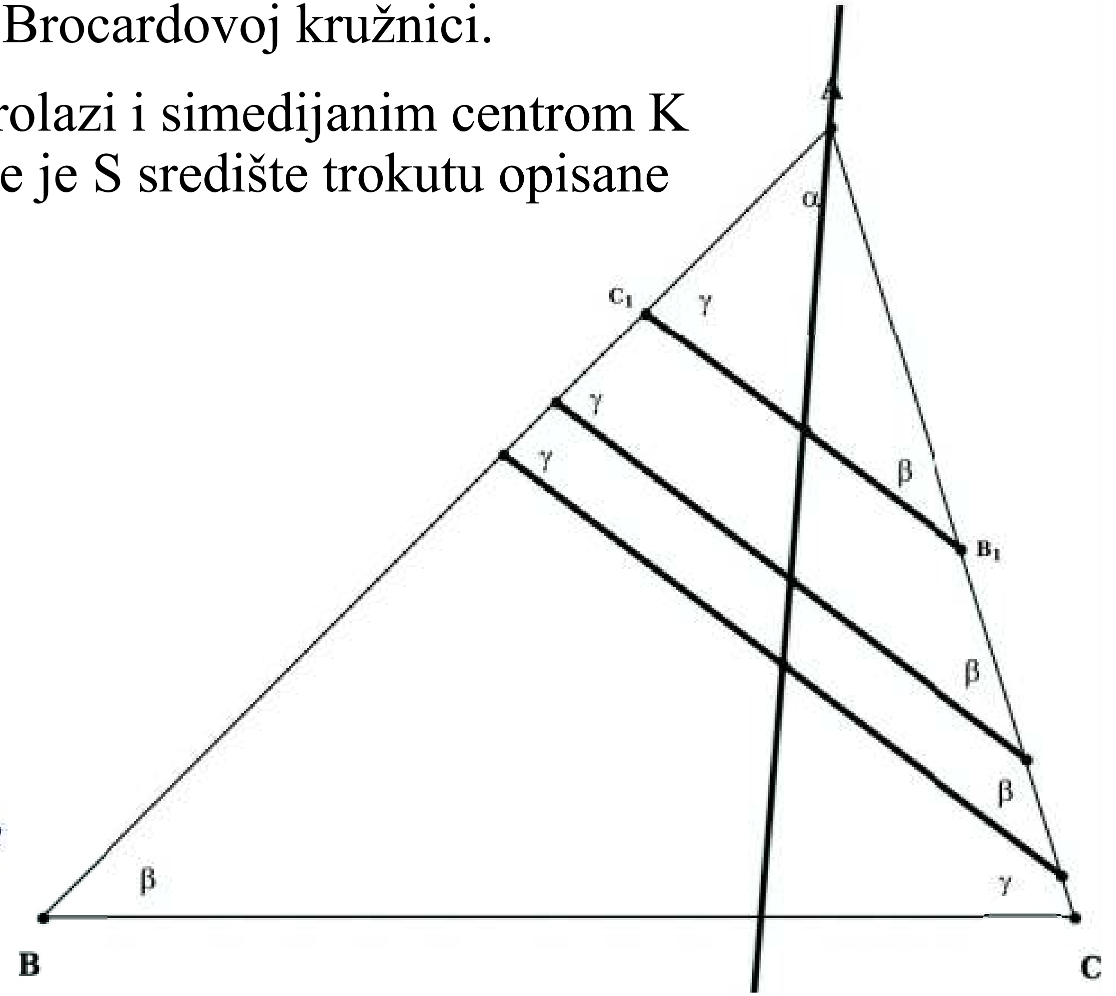
Slika 5.

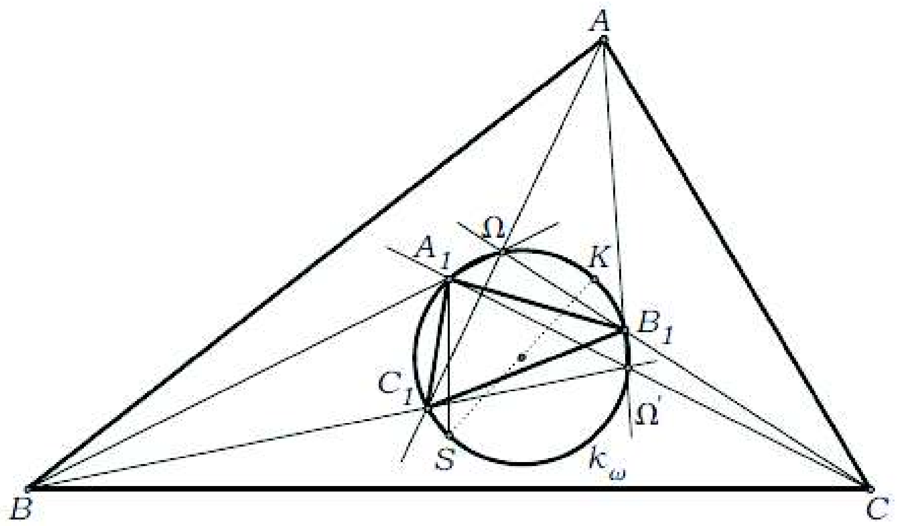
UMJESTO ZAKLJUČKA

- Pokazali smo dakle da vrhovi prvog Brocardovog trokuta, Brocardove točke i središte trokutu opisane kružnice leže na Brocardovoj kružnici.
- Može se dokazati da Brocardova točka prolazi i simedijanim centrom K trokuta, štoviše $\overline{SK}$ je njezin promjer, gdje je S središte trokutu opisane kružnice (Slika 5).



SLIKA 5.





SLIKA 5.

- Kako spomenutih sedam točaka leži na Brocardovoj kružnici često se ona u literaturi susreće i pod imenom kružnica sedam točaka.
- Može se definirati još jedan trokut čiji vrhovi leže na Brocardovoj kružnici, a to je drugi Brocardov trokut, trokut čiji su vrhovi sjecišta medijana i Brocardove kružnice danog trokuta. Taj trokut je također zanimljiv po svojim svojstvima.

PROJEKTNI ZADATAK – DODATNA NASTAVA
BROCARDOVE TOČKE TROKUTA – HENRI BROCARD

- **ZADATAK:**
  Istražiti u literaturi BROCARDOVE TOČKE TROKUTA. Posebice se osvrnuti na život i djelo Henrija Brocarda.

- **SMJERNICE ZA IZRADU:**
  - istražiti literaturu [5.] i internet na zadanu temu
  - ukratko nešto reći o pojmu Brocardove točke trokuta i životu i djelu Henrija Brocarda
  - prirediti kratku prezentaciju o novim spoznajama u trajanju od 5-8 minuta
  - izraditi plakat sa svim potrebnim elementima - istražiti način izrade plakata, što sve plakat treba sadržavati, kako treba izgledati?

- **ELEMENTI VRJEDNOVANJA:** točnost iskazanih tvrdnji, jasnoća prezentacije, poštivanje predviđenog vremena trajanja prezentacije, stil prezentacije, kreativnost

LITERATURA:

1. A. Besenyei, The Brocard Angle and a Geometrical Gem from Dmitriev and Dynkin, The American Mathematical Monthly, 122 (2015), 495. - 499.
2. L. Guggenbuhl, Henri Brocard and the geometry of the triangle Math. Gazette, 80 (1996), 241. - 243.
3. R. Honsberger, Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry, Math. Assoc. America, 1995.
4. N. Altshiller-Court, College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle, Dover Publication, 2007.
5. D.Palman, Trokut i kruznica, Element, Zagreb, 1994.
6. R. J. Stroeker, H. J. T. Hoogland, Brocardian geometry revisited or some remarkable inequalities, Nieuw Arch. Wisk. 2 (1984), 281. - 310.

HVALA NA PAŽNJI!